Vp.3 : Intersections - Résolution algébrique - 1

Intersection de deux droites

d a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\delta : \begin{cases} x = x_B + \alpha\theta \\ y = y_B + \beta\theta \\ z = z_B + \gamma\theta \end{cases}$, $\theta \in \mathbb{R}$

Pour déterminer **l'intersection** de d et δ , on résout le **système d'inconnues t et θ** : $\begin{cases} x_A + at = x_B + \alpha\theta \\ y_A + bt = y_B + \beta\theta \\ z_A + ct = z_B + \gamma\theta \end{cases}$

1. S'il n'y a **aucune solution**, alors les droites d et δ sont **parallèles ou non coplanaires**
2. S'il y a une **infinité de solutions**, les droites d et δ sont **confondues**
3. S'il y a une **solution unique**, alors les droites d et δ sont **sécantes en 1 point**
   $\Rightarrow$ on calcule les coordonnées du point d'intersection en **remplaçant la valeur de t trouvée dans la représentation paramétrique de d** (ou celle de θ dans δ)

Exemple :

Dans un repère de l'espace, on considère les points $E(2;-3;5)$, $F(0;-1;1)$ et $G(1;-8;8)$

et la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$ $, t \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que les droites (EF) et d sont strictement parallèles.

b. Montrer que les droites (EG) et d sont sécantes et préciser leur point d'intersection K

Vp.3 : Intersections - Résolution algébrique - 2

Intersection d'une droite et d'un plan

d de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$ et $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$

Pour déterminer **l'intersection** de $\mathcal{P}$ et de d, on résout le **système d'inconnue t** : $\begin{cases} \boldsymbol{x = x_A + \alpha t} \\ \boldsymbol{y = y_A + \beta t} \\ \boldsymbol{z = z_A + \gamma t} \\ \boldsymbol{ax + by + cz + d = 0} \end{cases}$

❶ Si il n'y a **aucune solution**, alors $\boldsymbol{\mathcal{P} // d}$: droite et plan sont **parallèles**

❷ Si il y a une **infinité de solutions**, alors $\boldsymbol{d \subset \mathcal{P}}$: la droite est **contenue** dans le plan

❸ Si il y a une **solution unique**, alors $\mathcal{P}$ et d sont **sécants en 1 point**
⇒ on calcule les coordonnées du point d'intersection en **remplaçant la valeur de t trouvée dans la représentation paramétrique de d**

Exemple : $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + z - 4 = 0$

et d_1 et d_2 de représentations paramétriques $d_1 \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 + 8t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \lambda \\ y = 3 \\ z = 6 + 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

d_3 la droite passant par le point $A(3; 5; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; 0)$

Étudier la position relative de chaque droite avec le plan $\mathcal{P}$ et déterminer leur éventuelle intersection.

Vp.3 : Intersections - Résolution algébrique - 3

Intersection de deux plans

$\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$

❶ On **commence** par déterminer **si** les plan sont **parallèles ou confondus**

$\Rightarrow$ on teste si leurs **vecteurs normaux sont colinéaires**

❷ S'ils sont **sécants** $\Rightarrow$ on détermine une représentation paramétrique de la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$

en **paramétrant une des coordonnées par *t*** : $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ \textbf{une des coordonnées} = \boldsymbol{t} \end{cases}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$

Exemple

Soient les plans $\mathcal{P}_1$ d'équation cartésienne $3x - 2y + z + 3 = 0$; $\mathcal{P}_2 : -x + y + 2z + 5 = 0$
et $\mathcal{P}_3$ d'équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$

a. Déterminer la position relative des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$

b. Déterminer la position relative des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$