

Corrections Savoirs SL 5

Corrigé Exercice 10

$$u_n = n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1$$

Donc par produit des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$-2n^3 + n = n^3 \left(-2 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-2 + \frac{1}{n^2}\right) = -2$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(-2 + \frac{1}{n^2}\right) = -\infty$$

Et par quotient des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

$$\varepsilon_n = 2^n - 6^n = 2^n \left(1 - \frac{6^n}{2^n}\right)$$

$$= 2^n \left(1 - \left(\frac{6}{2}\right)^n\right) = 2^n (1 - 3^n)$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n) = +\infty$$

$$\text{et on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 3^n) = -\infty$$

Donc par produit des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = -\infty$$

$$y_n = 4^n - 2^n = 2^{2n} - 2^n$$

$$= 2^n (2^n - 1)$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 1) = +\infty$$

Donc par produit des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$$

$$d_n = 3e^n - ne^n = (3 - n)e^n$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 - n) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^n) = +\infty$$

Donc par produit des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = -\infty$$

$$j_n = \frac{8}{n^3} \times (n^2 + 1) = \frac{8n^2 + 8}{n^3}$$

$$= \frac{\left(8 + \frac{8}{n^2}\right)}{n}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(8 + \frac{8}{n^2}\right) = 8$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n) = +\infty$$

Donc par produit des limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} j_n = 0$$

Corrigé Exercice 11

$$w_n = \frac{3n^2 + 5n - 1}{2n + 1} = \frac{n^2 \left(3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{n \left(3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{2 + \frac{1}{n}}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \left(3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\right) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$$

Donc par quotient des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

$$z_n = 3 - \frac{2n^2 - n}{1 - 3n^2} = 3 - \frac{n^2 \left(2 - \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(\frac{1}{n^2} - 3\right)} = 3 - \frac{2 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - 3}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 3\right) = -3$$

Donc par quotient des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 3 - \frac{2}{-3} = \frac{11}{3}$

$$c_n = \frac{1 + 2^n}{5^n} = \frac{2^n \left(\frac{1}{2^n} + 1\right)}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times \left(\frac{1}{2^n} + 1\right)$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n} + 1\right) = 1$$

Donc par produit des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$

$$a_n = \frac{\sqrt{n} - 1}{2n} = \frac{\sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2n} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt{n}) = +\infty$$

Donc par quotient des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Un peu plus...

$$x_n = \frac{2n - 3}{n^2 + 6} = \frac{n \left(2 - \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{6}{n^2}\right)} = \frac{2 - \frac{3}{n}}{n \left(1 + \frac{6}{n^2}\right)}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{3}{n}\right) = 2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \left(1 + \frac{6}{n^2}\right)\right) = +\infty$$

Donc par quotient des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

$$b_n = \frac{1 + 3^n}{2 - 5 \times 3^n} = \frac{3^n \left(\frac{1}{3^n} + 1\right)}{3^n \left(-5 + \frac{2}{3^n}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{3^n}}{-5 + \frac{2}{3^n}}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3^n}\right) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-5 + \frac{2}{3^n}\right) = -5$$

Donc par quotient des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\frac{1}{5}$

Corrigé Exercice 12

Exo A

1) La suite semble converger vers 1

$$2) a. v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{2u_n + 3 + 3u_n + 12} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15}$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$

Donc $v_{n+1} = \frac{1}{5} v_n$ la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de 1^{er} terme

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = -\frac{1}{3}$$

b. On a $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

c. $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \Leftrightarrow v_n(u_n + 3) = u_n - 1$

$$\Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -1 - 3v_n \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -1 - 3v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 3v_n) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - v_n) = 1$ et par quotient des limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

n	Un
0	0
1	0,75
2	0,947368
3	0,989362
4	0,997868
5	0,999573
6	0,999915
7	0,999983
8	0,999997
9	0,999999
10	1
11	1

Exo B

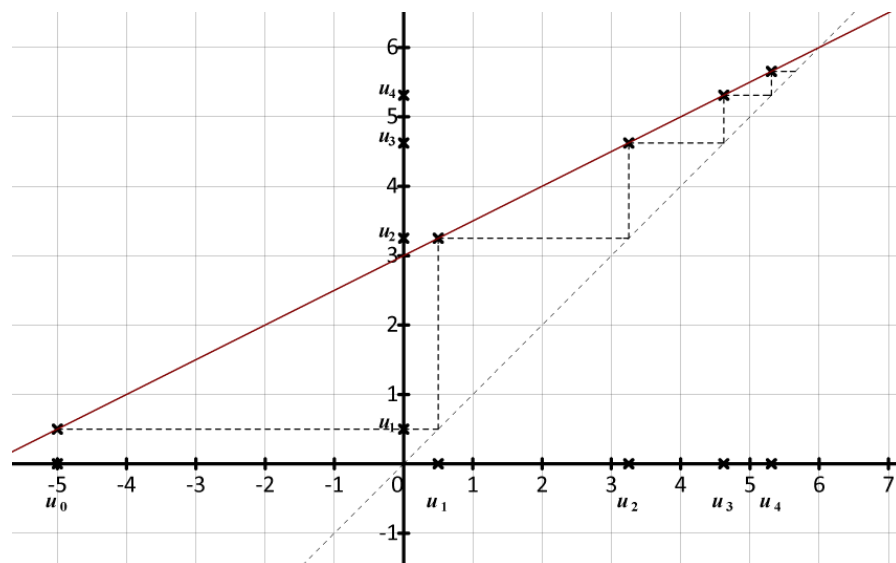
1) a. $\Rightarrow$

b. La suite semble être **croissante et convergente vers 6**

2) a. $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha + 3 = \alpha$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 6$$

b. C'est l'abscisse et l'ordonnée du point d'intersection de la courbe représentative de f avec la 1^{ère} bissectrice, droite d'équation $y = x$



3) a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}(v_n + 6) - 3 = \frac{1}{2}v_n + 3 - 3 = \frac{1}{2}v_n$

(v_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -11$

b) $v_n = v_0 \times q^n = -11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et donc $u_n = v_n + 6 = 6 - 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4) $u_{n+1} - u_n = \left(6 - 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - \left(6 - 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = -11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$u_{n+1} - u_n = 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{11}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Donc, pour tout entier n , on a $u_{n+1} - u_n > 0$
La suite est croissante

Limite : On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc par somme sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6$