Entraînement bac - Corrections - Exponentielles et logarithmes

Corrigé Exercice n°1

Partie A

1. $f(0) = \mathbf{3}$ et $f'(0) = \mathbf{-2}$

2. $f(0) = e^0 + a \times 0 + be^{-0} = 1 + b = 3 \iff \boldsymbol{b = 2}$

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. $f'(x) = \boldsymbol{e^x + a - 2e^{-x}}$

b. $f'(0) = \mathbf{1} + \boldsymbol{a} - \mathbf{2}$

c. $1 + a - 2 = -2 \iff \boldsymbol{a = -1}$ et $\boldsymbol{f(x) = e^x - x + 2e^{-x}}$

Partie B

1. $(e^x - 2)(e^x + 1) = (e^x)^2 + e^x - 2e^x - 2 = \boldsymbol{e^{2x} - e^x - 2}$ **CQFD**

2. $g'(x) = e^x - 1 - 2e^{-x} = e^x - 1 - \dfrac{2}{e^x} = \dfrac{(e^x)^2 - e^x - 2}{e^x} = \dfrac{e^{2x} - e^x - 2}{e^x} = \boldsymbol{\dfrac{(e^x - 2)(e^x + 1)}{e^x}}$

3. On a $e^x - 2 \geq 0 \iff e^x \geq 2 \iff x \geq \ln 2$
par ailleurs $e^x + 1$ est toujours positif, en tant que somme de positifs
On a $g(\ln(2)) = e^{\ln(2)} - \ln(2) + 2e^{-\ln(2)} = 2 - \ln 2 + 2 \times \frac{1}{e^{\ln(2)}} = 3 - \ln 2$

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$+\infty$
$e^x - 2$		$-$	0	$+$	
$e^x + 1$		$+$	$\vert$	$+$	
e^x		$+$	$\vert$	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$3 - \ln 2$	$\nearrow$	

Corrigé Exercice n° 2

PARTIE I

1. $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ car la tangente est horizontale et $f'(1) = \frac{-3}{3} = -1$

2. $\mathcal{T}_B : y = f'(1)(x-1) + f(1) \iff y = -(x-1) + 2 \iff y = -x + 3$

PARTIE II

1. $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2+\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = (2 - \ln(e)) \times e = (2-1) \times e = e \Rightarrow$ **$\mathcal{C}_f$ passe bien par le point $A\left(\frac{1}{e}; e\right)$**

$f(1) = \frac{2+\ln(1)}{1} = 2 \Rightarrow$ **$\mathcal{C}_f$ passe bien par le point $B(1; 2)$**

Pour l'intersection avec l'axe des abscisses, on résout :

$f(x) = 0 \iff \frac{2+\ln x}{x} = 0 \iff 2 + \ln x = 0 \iff \ln x = -2 \iff x = e^{-2}$

$\Rightarrow$ **$\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point $C(e^{-2}; 0)$**

2. $\lim_{x\to 0^+} 2 + \ln x = -\infty$ *et* $\lim_{x\to 0^+} x = 0^+$ Donc par quotient de limites $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

D'après les croissances comparées : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$

Donc par somme de limites $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3. $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - (2+\ln x) \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - 2 - \ln x}{x^2} = \dfrac{-1 - \ln x}{x^2}$ $\qquad CQFD$

4. On a $-1 - \ln x \geq 0 \iff \ln x \leq -1 \iff x \leq e^{-1}$ *ou* $x \leq \frac{1}{e}$

et d'après la question 1, $f\left(\frac{1}{e}\right) = e$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$-1 - \ln x$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$	$\|$	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

5. On a $1 + 2\ln x \geq 0 \iff \ln x \geq -\frac{1}{2} \iff x \geq e^{-\frac{1}{2}}$

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$1 + 2\ln x$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
x^3	0	$+$	$\|$	$+$	
$f''(x)$	$\|\|$	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$		Concave	PI	Convexe	

f est convexe sur $[e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$

Corrigé Exercice n°3

Affirmation 1 : FAUSSE

$(e^{a+b})^2 = (e^a)^2 + 2e^a e^b + (e^b)^2 = e^{2a} + 2e^{a+b} + e^{2b} \neq e^{2a} + e^{2b}$

Affirmation 2 : VRAIE

On a $f(0) = -2 + 3e^0 = 1$
et $f'(x) = -e^x + (3-x)e^x = (-1+3-x)e^x = (2-x)e^x$ donc $f'(0) = 2$
équation de la tangente $y = f'(0)x + f(0) \Leftrightarrow \quad y = 2x - 1$

Affirmation 3 : FAUSSE

$e^{2x} - e^x + \frac{3}{x} = e^x(e^x - 1) + \frac{3}{x}$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 1 = +\infty$ donc par produit de limite $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(e^x-1)$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$ on a par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x + \frac{3}{x} = +\infty$

Affirmation 4 : VRAIE

Soit $f(x) = 1 - x + e^{-x}$ on a $f'(x) = -1 - e^{-x}$ donc $f'(x)$ est toujours négative (somme de 2 termes strictement négatifs) et la fonction est décroissante
On a $f(0) = 1 + 1 = 2$ et $f(2) = 1 - 2 + e^{-2} = -1 + e^{-2} \simeq -0{,}9$
Donc

x	0		2
$f(x)$	2	$\searrow$	$-1+e^{-2}$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0;2]$ et $0 \in [f(2); f(0)]$. Donc d'après el théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0;2]$

Affirmation 5 : VRAIE

$g'(x) = 2x - 5 + e^x$ et $g''(x) = 2 + e^x$ donc $g''(x) > 0$ (somme de deux termes strictement positifs) et la fonction g est bien convexe sur $\mathbb{R}$

Corrigé Exercice n°4

Partie I

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x - 2 = 0$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2. $g'(x) = \frac{1}{x} + 2 = \frac{1+2x}{x}$

x	0		$+\infty$
$1+2x$		$+$	
x	0	$+$	
$g'(x)$	$\vert\vert$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $0 \in]-\infty;\ +\infty[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\ ;\ +\infty[$

4. $g(1) = \ln 1 + 2 - 2 = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie II

1. a.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)(\ln(x) - 1) + \left(2 - \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln x - 1}{x^2} + \frac{2x - 1}{x} \times \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 1 + 2x - 1}{x^2} = \frac{\ln x + 2x - 2}{x^2}$$

On a bien $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b. On a $f(1) = (2-1)(\ln 1 - 1) = 1 \times (-1) = -1$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
x^2	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{x} = 0 \ \ ou \ \ \ln x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2 \ \ ou \ \ \ln x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ \ ou \ \ x = e$

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$f(x)$	$\vert\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie III

1.

x	0		$\frac{1}{2}$		e		$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	$\vert\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. On a $F'\left(\frac{1}{2}\right) = F'(e) = 0$ Donc $\mathcal{C}_F$ admet **deux tangentes horizontales, en $x = \frac{1}{2}$ et en $x = e$**