BAC BLANC de MATHS - CORRECTION

Exercice 1 **7 points**

Partie A

1. On obtient : $u_1 = 3 - \frac{10}{5+4} = \frac{27}{9} - \frac{10}{9} = \frac{17}{9}$ et $u_2 = 3 - \frac{10}{\frac{17}{9}+4} = 3 - \frac{90}{17+36} = \frac{159}{53} - \frac{90}{53} = \frac{69}{53}$.

2. La suite (u_n) semble être décroissante, converger vers une limite égale à 1.

3. **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ donc on a bien $u_0 \geq 1$.
Hérédité : Si, pour $n = p$, on a : $u_p \geq 1$ alors :

$$u_p + 4 \geq 5 \quad \Rightarrow \frac{1}{u_p + 4} \leq \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \frac{10}{u_p + 4} \leq 2 \quad \Rightarrow -\frac{10}{u_p + 4} \geq -2$$

$$\Rightarrow 3 - \frac{10}{u_p + 4} \geq 3 - 2 \quad \Rightarrow \quad u_{p+1} \geq 1$$

Conclusion : On a donc effectivement, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.

4. On a d'une part :

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - u_n = \frac{3(u_n + 4) - 10 - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4}$$
$$= \frac{3u_n + 12 - 10 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{2 - u_n - u_n^2}{u_n + 4}$$

Et d'autre part :

$$\frac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4} = \frac{u_n + 2 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 4} = \frac{2 - u_n - u_n^2}{u_n + 4}$$

On a donc effectivement : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

4. Sachant d'après la question **3** que $u_n \geq 1$, on a alors :
- $1 - u_n$ est négatif ;
- $u_n + 2 \geq 3 \rightarrow u_n + 2$ est positif ;
- $u_n + 4$ est positif de même.

La quantité $u_{n+1} - u_n$ est donc négative. La suite (u_n) est donc **décroissante**, ce qui vérifie la 1re conjecture de la question 2.

5. D'après les questions **3** et **4**, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. Donc d'après le théorème des suites monotones bornées, la suite (u_n) converge.

Partie B

1. a. On a d'une part :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{3-\frac{10}{u_n+4}-1}{3-\frac{10}{u_n+4}+2} = \frac{2-\frac{10}{u_n+4}}{5-\frac{10}{u_n+4}} = \frac{2(u_n+4)-10}{5(u_n+4)-10} = \frac{2u_n-2}{5u_n+10}$$

Et d'autre part :

$$\frac{2}{5}v_n = \frac{2}{5}\times\frac{u_n-1}{u_n+2} = \frac{2u_n-2}{5u_n+10}$$

On a donc $v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
D'autre part, $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{4}{7}$.

b. On a donc : $v_n = \frac{4}{7}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$. Puisque $\frac{2}{5} \in]-1;1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

c. On a $\frac{4}{7} < 1$ et $\frac{2}{5} < 1$ donc $\left(\frac{2}{5}\right)^n < 1^n$ c'est-à-dire $\left(\frac{2}{5}\right)^n < 1$. Ainsi $\frac{4}{7}\times\left(\frac{2}{5}\right)^n < 1$.
On en déduit que, pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$.

2. En utilisant le résultat de la question **1.b**, on obtient par limite de somme et de quotient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2\times 0+1}{1-0} = 1$$

(ce qui vérifie la conjecture de la partie A)

Partie C

1. On constate que $u_5 > 1{,}01 > u_6$ donc la fonction **recherche()** renvoie la valeur $n = 6$.

2. Cette valeur est le rang n à partir duquel u_n passe en-dessous de la valeur 1,01.

```
def recherche() :
    u = 5
    n = 0
    while u>=1.01 :
        n = n+1
        u = 3 - 10/(u+4)
    return n
```

Exercice 2 **7 points**

1. Pour $t = 0$, on a effectivement $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ donc le point $A(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$ appartient à la droite d_1.

2. On a : $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Or $\frac{x_{\overrightarrow{u_2}}}{x_{\overrightarrow{u_1}}} \neq \frac{y_{\overrightarrow{u_2}}}{y_{\overrightarrow{u_1}}}$ donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
Les droites d_1 et d_2 ne sont donc pas parallèles.

3. On calcule : $\vec{v}.\overrightarrow{u_1} = 1 \times 1 - 2 \times (-1) - 3 \times 1 = 1 + 2 - 3 = 0$
et $\vec{v}.\overrightarrow{u_2} = 1 \times 2 - 2 \times 1 - 3 \times 0 = 2 - 2 = 0$. Donc $\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4. a. Considérons le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a : $\vec{n}.\overrightarrow{u_1} = 5 \times 1 + 4 \times (-1) - 1 \times 1 = 5 - 4 - 1 = 0$
et $\vec{n}.\vec{v} = 5 \times 1 + 4 \times (-2) - 1 \times (-3) = 5 - 8 + 3 = 0$.
Donc $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{v}$ et $\overrightarrow{u_1}$. Or $\vec{v}$ et $\overrightarrow{u_1}$, étant eux-mêmes orthogonaux, ne sont pas colinéaires et forment une base du plan $\mathcal{P}$.
$\mathcal{P}$ possède donc une équation cartésienne de la forme :

$$5x + 4y - z + d = 0$$

Or $A \in \mathcal{P} \Rightarrow d = -5x_A - 4y_A + z_A = -10 - 12 = -22$.
Donc $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $5x + 4y - z - 22 = 0$. CQFD

b. Pour $t' = 4$, la représentation paramétrique de d_2 donne : $\begin{cases} x = -5 + 8 = 3 \\ y = -1 + 4 = 3 \\ z = 5 \end{cases}$ donc $B \in d_2$.
D'autre part : $5x_B + 4y_B - z_B - 22 = 15 + 12 - 5 - 22 = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{P}$ donc B est à l'intersection de d_2 et de $\mathcal{P}$: la droite d_2 coupe le plan $\mathcal{P}$ au point B.
(Autre méthode : calculer l'intersection de $\mathcal{P}$ et de d_2 et constater que c'est bien B)

5. a. Une représentation paramétrique de cette droite Δ est donnée par :

$$\Delta :\ \begin{cases} x = 3 + \alpha \\ y = 3 - 2\alpha \\ z = 5 - 3\alpha \end{cases},\quad \alpha \in \mathbb{R}$$

b. On a vu que $u_1 \perp \vec{v}$ donc les droites d_1 et Δ sont orthogonales, mais elles sont peut-être non coplanaires…
La droite d_1 passe par A, avec $A \in \mathcal{P}$ et avec $\overrightarrow{u_1}$ à la fois vecteur directeur de d_1 et de $\mathcal{P}$ donc d_1 est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
La droite Δ passe par B, avec $B \in \mathcal{P}$ et avec $\vec{v}$ à la fois vecteur directeur deΔ et de $\mathcal{P}$ donc Δ est aussi incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
Les droites d_1 et Δ sont donc coplanaires et orthogonales : elles sont donc perpendiculaires et donc sécantes.

c. La droite Δ donnée est donc :
• sécante avec d_1 et sécante (en B) avec d_2
• orthogonale (et donc même perpendiculaire) à la fois à d_1 et à d_2
Cela prouve l'existence d'une droite qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

6. a. Pour $t = 2$ et $\alpha = 1$ les représentations paramétriques de d_1 et de Δ donnent toutes les deux $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$.
Donc C appartient à la fois à d_1 et à Δ, c'est le point d'intersection de ces deux droites perpendiculaires.

b. On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $BC = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$.

Exercice 3 **7 points**

1. a. Par croissance comparée, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

b. Lorsque x tend vers 0^+, e^x tend vers 1, donc par limite de quotient :

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

Donc l'axe des ordonnées (d'équation $x = 0$) est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

2. On a :

$$f^{'}(x) = \frac{e^x x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2} \qquad \text{CQFD}$$

3. On obtient donc :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$	$\vert$	$+$	
x^2	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f^{'}(x)$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\vert\vert+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

4. Il y a trois cas à distinguer :

• On constate que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) \geq e$ donc **si m** $< e$, l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution.

• **Si $m = e$**, alors l'équation $f(x) = m$ (c'est-à-dire l'équation $f(x) = e$) possède une seule solution qui est $\alpha = 1$.

• **Si m** $> e$, alors , étant donné que f est continue, strictement décroissante sur $]0; 1]$, avec $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ et $f(1) < m$, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = m$ possède une unique solution sur $]0; 1[$. De même, elle possède aussi une unique solution sur $]1; +\infty[$. L'équation $f(x) = m$ possède ainsi exactement 2 solutions.

5. a. Le coefficient directeur demandé est :

$$f^{'}(a) = \frac{(a-1)e^a}{a^2}$$

b. Vu que Δ a pour coefficient directeur -1, la tangente T_a doit avoir le même coefficient directeur. On doit donc avoir : $f^{'}(a) = -1$.

c. Avec les questions a et b, on déduit que :

$$\frac{(a-1)e^a}{a^2} = -1 \quad \Leftrightarrow (a-1)e^a = -a^2 \Leftrightarrow (a-1)e^a + a^2 = 0 \quad \text{CQFD}$$

d. On a : $g^{'}(x) = e^x + (x-1)e^x + 2x = xe^x + 2x = x(e^x + 2)$.

x et e^x étant positifs, $g^{'}(x)$ est donc positive et g est strictement croissante.

D'autre part $g(0) = -1$ et par limite de produit et de somme :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

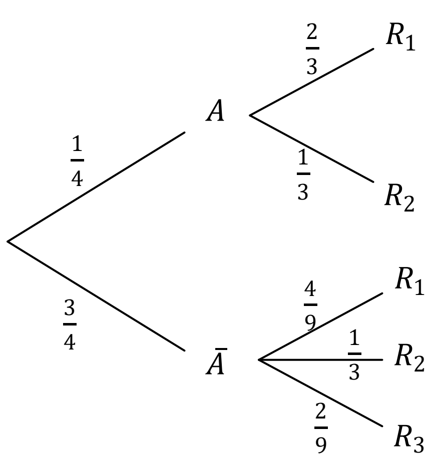
On obtient donc :

x	0		$+\infty$
$g(x)$	-1	↗	$+\infty$

e. g est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ avec $g(0) < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution $a \in]0; +\infty[$. Cette solution vérifie donc $(a-1)e^a + a^2 = 0$, ce qui d'après la question b correspond à une tangente parallèle à Δ.

Il existe donc un unique point A en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Exercice 4 **7 points**



1. On a $p(A) = \frac{75}{300} = \frac{1}{4}$; $p_A(R_1) = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$; $p_{\bar{A}}(R_1) = \frac{100}{225} = \frac{4}{9}$; $p_{\bar{A}}(R_2) = \frac{75}{225} = \frac{1}{3}$.
On obtient donc l'arbre ci-contre.

2. a. On a : $p(A \cap R_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.
Il y a donc une chance sur douze que la personne interrogée ait suivi une formation avec conduite accompagnée et réussi l'examen à sa deuxième présentation.

b. La probabilité considérée est :
$p(R_2) = p(A \cap R_2) + p(\bar{A} \cap R_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. CQFD

c. La probabilité demandée est :

$$p_{R_2}(A) = \frac{p(A \cap R_2)}{p(R_2)} = \frac{1}{12} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

Il y a donc une chance sur quatre que la personne ait suivi une formation avec conduite accompagnée.

3. a. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par :
- $p(X = 1) = p(R_1) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
- $p(X = 2) = p(R_2) = \frac{1}{3}$
- $p(X = 3) = p(R_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{6}$

b. On a donc : $E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \simeq 1{,}7$.
Cela signifie qu'en moyenne, les candidats réussissent leur examen au bout de 1,7 présentation environ (plutôt à la 2^{e} présentation, mais un peu moins).

4. a. (i) Les 10 tirages étant indépendants avec la même probabilité $\frac{1}{6}$ d'obtenir une personne qui réussisse l'examen au 3^{e} passage, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{6}$.

(ii) On a alors :

$$p(Y = 1) = \binom{10}{1} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^9 \simeq 32\%$$

Il y a donc environ 32% de chances qu'il y ait exactement une personne qui ne réussisse l'examen qu'à la 3^{e} présentation.

b. On a alors :

$$p(Y = 0) = \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Cette probabilité représente la probabilité qu'aucune des personnes du groupe réussisse l'examen au 3^{e} passage, c'est-à-dire que toutes les personnes le réussissent en 1 ou 2 passages.
On a alors : $p(Y > 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. C'est la probabilité de l'événement : « au moins une personne n'a réussi l'examen qu'à la 3^{e} présentation ».

b. On constate que $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} < 0{,}9 < 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{13}$ donc la commande seuil(0.9) renvoie la valeur 13.
Si on choisit un groupe de 13 personnes ou plus, il y aura donc plus de 90% de risque qu'au moins une personne ne réussisse l'examen qu'au 3^{e} passage.