Corrigé Sujet n°4

Corrigé Exercice 13

1. Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ on a bien $1 \leq u_0 \leq e^2$
la propriété est **vraie pour $n = 0$**
Hypothèse de récurrence : on suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $\mathbf{1 \leq u_p \leq e^2}$
Hérédité : On a $1 \leq u_p \leq e^2$
Comme la fonction racine est croissante, on en déduit :
$\sqrt{1} \leq \sqrt{u_p} \leq \sqrt{e^2} \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{u_p} \leq e \Leftrightarrow e \leq e\sqrt{u_p} \leq e^2$
et comme $1 \leq e$, on obtient, par élargissement $1 \leq e\sqrt{u_p} \leq e^2 \Leftrightarrow 1 \leq u_{p+1} \leq e^2$
Donc la propriété est aussi vraie pour $p + 1$: elle est héréditaire
Conclusion : pour tout entier naturel n on a : $\mathbf{1 \leq u_n \leq e^2}$

2. a. 1ère méthode : On cherche à démontrer par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = e \simeq 2{,}7$ on a bien $u_0 \leq u_1$ la propriété est **vraie pour $n = 0$**
Hypothèse de récurrence : on suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $\mathbf{u_p \leq u_{p+1}}$
Hérédité : On a $u_p \leq u_{p+1}$ on a montré à la question précédente que les termes de la suite étaient positifs
Donc $\sqrt{u_p} \leq \sqrt{u_{p+1}} \Leftrightarrow e\sqrt{u_p} \leq e\sqrt{u_{p+1}} \Leftrightarrow u_{p+1} \leq u_{p+2}$
Donc la propriété est aussi vraie pour $p + 1$: elle est héréditaire
Conclusion : pour tout entier naturel n on a : $\mathbf{u_n \leq u_{n+1}}$ **et la suite (u_n) est croissante**

2ème méthode : On a montré à la question précédente que la suite (u_n) était à termes positifs.
Or $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e\sqrt{u_n}}{u_n} = \frac{e}{\sqrt{u_n}}$ et comme $u_n \leq e^2 \Rightarrow \sqrt{u_n} \leq e \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{u_n}} \geq \frac{1}{e}$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq e \times \frac{1}{e} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$
On a donc $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite (u_n) est croissante

*(C'est plus rapide qu'une récurrence, mais je rappelle que ça ne marche **QUE pour les suites à termes POSITIFS**, il faut donc l'avoir prouvé auparavant. N'oubliez pas non plus que déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$ reste une autre méthode possible)*

b. La suite (u_n) est croissante et majorée par e^2 : d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est donc **convergente vers un réel ℓ**

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n) - 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln\left(e \times \sqrt{u_n}\right) - 2 = \ln e + \ln\left(\sqrt{u_n}\right) - 2 = 1 + \tfrac{1}{2}\ln(u_n) - 2 = \tfrac{1}{2}\ln(u_n) - 1$$
$$= \tfrac{1}{2}(\ln(u_n) - 2) = \tfrac{1}{2}v_n$$

Vous pouvez aussi utiliser $ln(u_n) = v_n + 2$

Donc (v_n) est bien une suite **géométrique de raison $\frac{1}{2}$** et de 1er terme $v_0 = \ln(1) - 2 = \mathbf{-2}$

b. On a alors $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -2 \times \frac{1^n}{2^n} = -\mathbf{\frac{1}{2^{n-1}}}$

c. $\mathbf{v_n} = \ln(u_n) - 2 \Leftrightarrow \ln(u_n) = v_n + 2 \Leftrightarrow u_n = e^{v_n + 2} = e^{-\frac{1}{2^{n-1}} + 2}$

d. On a $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(-\frac{1}{2^{n-1}} + 2\right) = 2$ donc, par composée de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{u_n = e^2}$

4. Affirmation 1 : Affirmation **fausse**, en effet, on a $u_1 \simeq 122$ donc $\boldsymbol{u_1 < u_0}$ et $u_2 \simeq 30$ et $\boldsymbol{u_2 < u_1}$
la suite a plutôt l'air décroissante

Affirmation 2 : Affirmation **vraie** : dans le raisonnement par récurrence de la question 1, la valeur de u_0 n'intervient que pour l'initialisation.
Or, c'est encore vrai pour $u_0 = 2$, on a toujours $1 \leq u_0 \leq e^2$.
La propriété reste vraie au rang 0 et comme elle est héréditaire, **elle reste vraie pour tout $\boldsymbol{n}$**

Affirmation 3 :Affirmation **fausse**

$$u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow e\sqrt{u_n} = u_n \Leftrightarrow u_n^2 - e^2 u_n = 0 \Leftrightarrow u_n(u_n - e^2) = 0 \Leftrightarrow u_n = 0 \;\; ou \;\; u_n = e^2$$

Donc la suite est stationnaire si $u_0 = 0$ **mais aussi si $\boldsymbol{u_0 = e^2}$**

Corrigé Exercice 14

1. a. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2e^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \;\; ou \;\; x = 1$
On a $g(-1) = e^{-(-1)} = e$ et $g(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$
Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont pour coordonnées $(\boldsymbol{-1; e})$ **et** $\left(\boldsymbol{1; \frac{1}{e}}\right)$

b. $f(x) - g(x) = x^2e^{-x} - e^{-x} = (x^2 - 1)e^{-1}$
Donc

x	0		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$, on a $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$ donc **$\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ est au dessus de $\boldsymbol{\mathcal{C}_g}$**
Pour $x \in [-1; 1]$, on a $f(x) - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ donc **$\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ est en dessous de $\boldsymbol{\mathcal{C}_g}$**

2. a. $d'(x) = -e^{-x} - (2xe^{-x} - x^2e^{-x}) = -e^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$ CQFD

b. Pour $x^2 - 2x - 1$, on a $\Delta = 8$ et $x_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{2}$
alors

x	-1		$1-\sqrt{2}$		1
$x^2 - 2x - 1$	$\vert$	$+$	0	$-$	
e^{-x}	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$d'(x)$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$d(x)$	0	$\nearrow$	$(2\sqrt{2}-2)e^{-1+\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

Avec $d(-1) = e^1 - 1 \times e^1 = 0$; $d(1) = e^{-1} - 1 \times e^{-1} = 0$
et $d(1-\sqrt{2}) = e^{-1+\sqrt{2}} - (1-\sqrt{2})^2 e^{-1+\sqrt{2}} = (1 - 1 + 2\sqrt{2} - 2)e^{-1+\sqrt{2}} = (2\sqrt{2} - 2)e^{-1+\sqrt{2}}$

c. D'après le tableau de variation, la distance maximale est atteinte pour $x_0 = 1 - \sqrt{2}$.
On a alors $d(x_0) = (2\sqrt{2} - 2)e^{-1+\sqrt{2}}$ soit $M_0N_0 \simeq 1{,}3$

3. $h'(x) = -e^{-x} - 1$ donc $h'(x) < 0$ car c'est la somme de deux termes strictement négatifs.
Donc la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x-2 = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$
De même $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -x+2 = +\infty$ on a $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

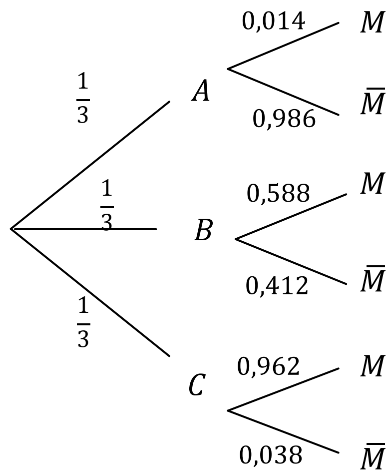
La fonction h est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-\infty; +\infty[$.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ n'admet qu'une seule solution α.

On a $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} - \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = \alpha + 2$
Il s'agit donc de l'abscisse de l'unique point d'intersection de la droite Δ et de la courbe $\mathcal{C}_g$.

Corrigé Exercice 15

1. a. Il s'agit d'une répétition de 20 épreuves identiques et indépendantes, où la probabilité de répondre juste est de $\frac{1}{4}$: la variable aléatoire X suit donc **une loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n = 20}$ et $\boldsymbol{p = 0,25}$**

b. $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \simeq 0{,}014$
La probabilité qu'Anselme ait la moyenne est d'environ 1,4 %



2. La situation correspond à l'arbre de probabilité ci-contre :

$$p_M(B) = \frac{p(B\cap M)}{p(M)} = \frac{p(B\cap M)}{p(A\cap M)+p(B\cap M)+p(C\cap M)} = \frac{\frac{1}{3}\times 0{,}588}{\frac{1}{3}\times 0{,}014+\frac{1}{3}\times 0{,}588+\frac{1}{3}\times 0{,}962} \simeq 0{,}376$$

Il ya environ $\boldsymbol{37,6\ \%}$ de chances qu'il s'agisse de la copie de Barbara?

Corrigé Exercice 16

Corrigé Partie A

1. Les triangles SAC et ABD sont isocèles en S, et O est le milieu des côtés [AC] et [BD], donc la droite (SO) est, dans chaque triangle, la médiane issue de O, confondue avec la hauteur.
La droite (SO) est donc perpendiculaire aux droites (AC) et (BD).
Les points A, B, C et D étant coplanaires dans le plan (ABC), **la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC)**

2. $\mathcal{V} = \mathcal{A}(ABCD) \times h = AB^2 \times OS$
Or comme ABCD est un carré, on a OAB isocèle et rectangle en O et $AB^2 = 2OA^2$
On a de plus $OA = OS$
Donc $\mathcal{V} = \frac{1}{3}(2\,OA^2 \times OA) = \frac{2}{3}\,OA^3 = \frac{2}{3} \times 12^3 = \boldsymbol{1\,152\ cm^3}$

Corrigé Partie B

1. a. On a $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}+\frac{1}{2}\ \overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\ \overrightarrow{OS}$ donc $P\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$

On montre de même que $Q\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

On a aussi $C(-1;0;0)$ donc $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}0-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-0\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PC}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ 0\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{PQ}=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times\frac{1}{2}+(-3)\times 0=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{PQ}$

$\vec{n}.\overrightarrow{PC}=1\times\left(-\frac{3}{2}\right)+1\times 0+(-3)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{PC}$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteur non colinéaires du plan (PQC), **il est donc normal au plan $(\boldsymbol{PQC})$.**

b. Le plan (PQC) a une équation du type $x+y-3z+d=0$
avec $C\in(PQC)$ donc $x_C+y_C-3z_C+d=0 \Leftrightarrow -1+d=0 \Leftrightarrow d=1$
donc une équation cartésienne du plan (PQC) est $\boldsymbol{x+y-3z+1=0}$

2. a. la droite (SH) a pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et passe par le point $S(0;0;1)$ donc une représentation paramétrique est : $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-3\boldsymbol{t}\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

b. Le point H est le point d'intersection de la droite (SH) et du plan (PQC) : on résout

$$\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-3t\\x+y-3z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-3t\\t+t-3(1-3t)+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-3t\\-2+11t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{11}\\y=\frac{2}{11}\\z=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}\\t=\frac{2}{11}\end{cases}$$

Donc le point $\boldsymbol{H}$ a pour coordonnées $\boldsymbol{H\left(\frac{2}{11};\frac{2}{11};\frac{5}{11}\right)}$

c. $SH=\sqrt{(x_H-x_S)^2+(y_H-y_S)^2+(z_H-z_S)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{11}\right)^2+\left(\frac{2}{11}\right)^2+\left(-\frac{6}{11}\right)^2}=\frac{\sqrt{4+4+36}}{11}=\frac{\sqrt{44}}{11}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{11}}{11}}$

3. La pyramide $SPQCD$ a pour base le quadrilatère $PQCD$ et pour hauteur SH (perpendiculaire à la base)
Donc $\mathcal{V}(SPQCD)=\frac{\mathcal{A}(PQCD)\times SH}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{11}}{8}\times\frac{2\sqrt{11}}{11}\right)=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ **en unité de volume**

Corrigé Partie C

Une unité de volume vaut : $1\ u.v.=OA\times OB\times OS=12^3=1\,728\ cm^3$
Donc le volume de la pyramide $SPQCD$ est $\mathcal{V}=\frac{1}{4}\times 1728=\boldsymbol{432}\ cm^3$
Or on a montré partie A que la pyramide entière avait un volume de $\boldsymbol{1\,152\ cm^3}$ donc la moitié de ce volume est de 576 cm^3. **Effectivement, le partage ne serait pas équitable**

(Heureusement que Fanny a pensé à modéliser tout l'exercice, sinon elle se serait fait avoir…)