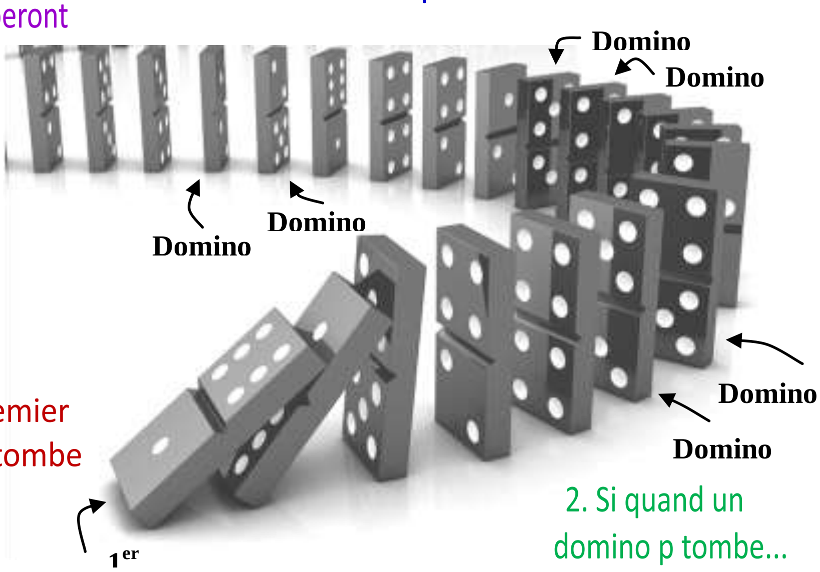
Raisonnement par récurrence

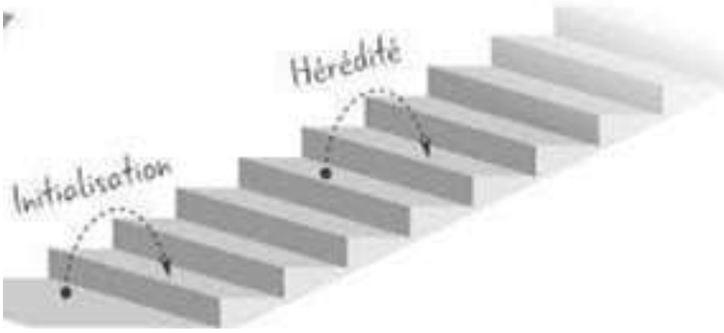
Image des dominos

Idée générale :



Étapes	*Ce qu'on fait*	*Ce qui s'écrit*
(1) Initialisation	On vérifie (par le calcul) que la propriété est vraie pour un entier n_0 (souvent $n = 0$ ou $n = 1$). Autrement dit, on montre que P_{n_0} est vraie	*Pour $n = n_0$, on a [1er membre = tant] et [2e membre = tant] Donc la propriété est vraie pour $n = n_0$*
(2) Hérédité	Si, pour un entier $n = p$ quelconque, la propriété P_n est vraie (donc la propriété P_p est vraie)	*Si pour $n = p$, la propriété est vraie alors on a : [on écrit ici la propriété P_p]*
	On démontre (par le calcul) que la propriété est alors vraie pour l'entier $= p + 1$. Autrement dit, on démontre que P_{p+1} est vraie, en utilisant, à un moment, le fait que P_p est vraie.	*Alors pour $n = p + 1$ D'une part [1er membre = ...] D'autre part [2e membre = ...]* (c'est le corps de la démonstration) *Alors la propriété est aussi vraie pour $n = p + 1$*
(3) Conclusion	On en déduit, d'après le principe de récurrence, que la propriété est vraie pour tous les entiers à partir de n_0	*Ainsi, pour tout entier $n \geq n_0$, la propriété P_n est vraie.*

L'escalier



Si on sait que, quand on est sur une marche, quelle qu'elle soit,	***Hypothèse** de récurrence*
on sait monter sur la marche suivante,	*Principe **d'hérédité***
alors il suffit qu'on commence sur une première marche,	*Principe de **l'initialisation***
pour être sûr de pouvoir monter l'escalier	***Conclusion***

Démonstration par récurrence - Formule explicite d'une suite

Étapes	Principe	Mise en pratique/Rédaction	*Explication/Traduction*
Énoncé	*Prouver que la propriété P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$*	On sait que $T_{n+1} = 0{,}82T_n + 3{,}6$ et que $T_0 = 1\,000$ Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$	*Ici, la propriété P_n c'est l'égalité :* $\boldsymbol{T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20}$
Initialisation	*On vérifie que P_{n_0} est vraie.*	Pour $n = 0$, on a : D'une part $980 \times 0{,}82^0 + 20 = 980 \times 1 + 20 = 1000$ D'autre part : $T_n = T_0 = 1000$ Il y a égalité Donc la propriété est vraie au rang 0	*Il faut vérifier que la propriété P_0 est vraie, c'est-à-dire que , pour $n = 0$, T_0 est bien égal à $980 \times 0{,}82^0 + 20$* *On ne part pas de l'égalité, c'est la fin de la réponse.* *On calcule séparément*
Hérédité	*On suppose que P_p est vraie*	Si la propriété P_n est vraie pour $n = p$, alors on a : $T_p = 980 \times 0{,}82^p + 20$	*On remet juste la propriété de l'énoncé, mais en l'écrivant au rang p en supposant qu'elle est vraie*
	Il faut prouver que P_{p+1} est vraie	Pour $n = p + 1$, on a : D'une part : $980 \times 0{,}82^n + 20 = 980 \times 0{,}82^{p+1} + 20$ D'autre part : $T_n = T_{p+1} = 0{,}82T_p + 3{,}6$ $= 0{,}82(980 \times 0{,}82^p + 20) + 3{,}6$ $= 980 \times 0{,}82 \times 0{,}82^p + 16{,}4 + 3{,}6$ $= 980 \times 0{,}82^{p+1} + 20$ Il y a égalité La propriété est vraie pour $n = p + 1$	*On commence par écrire pour $n = p + 1$ la propriété à laquelle on doit arriver.* *Séparément, on part de $T_n = T_{p+1}$ et on utilise la formule de récurrence pour exprimer T_{p+1} en fonction de T_p* *Comme on a fait l'hypothèse que la propriété est vraie au rang p, on peut alors remplacer T_p.* *Reste à calculer pour retrouver le résultat auquel on doit arriver.*
Conclusion	*La propriété est vraie pour un permier nombre (initialisation), et on sait que si elle est vraie pour un entier quelconque, alors elle est vraie pour le suivant (hérédité))* *Elle est donc toujours vraie à partir du 1^er^ nombre*	On a bien, pour tout entier naturel n : $T_n = 980 \times 0{,}82^n + 20$	*On reprend l'énoncé, mais sous forme affirmative*