

Corrections Exercice 13

1) a. $S = \{4 + 11k, k \in \mathbb{Z}\}$

b. $y \equiv 4 [5] \Rightarrow S = \{4 + 5p, p \in \mathbb{Z}\}$

c. $a \equiv 1 [3] \Rightarrow S = \{3n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$

2) a. $\Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 4 [7] \\ 0 < x < 20 \end{cases}$

Les nombres x sont de la forme $4 + 7n$, donc dans $]0 ; 20[$ on a $S = \{4 ; 11 ; 18\}$

b. Les nombres y sont de la forme $4 + 9k$, donc dans $[10 ; 40]$ on a $S = \{13 ; 22 ; 31 ; 40\}$

c. $a \equiv 2 [4]$ Les nombres a sont de la forme $2 + 4n$, donc dans $[-12 ; 5]$ on a $S = \{-10 ; -6 ; -2 ; 2\}$

3) a. On a $\begin{cases} 37x - 29 \equiv 15 [8] \\ 37 \equiv 5 [8] \\ -29 \equiv 3 [8] \\ 15 \equiv 7 [8] \end{cases}$ donc $5x + 3 \equiv 7 [8]$

b. On a $\begin{cases} 12 \equiv 0 [2] \\ -45 \equiv 1 [2] \\ 9 \equiv 1 [2] \end{cases}$ On a donc $12 - 45y \equiv 9 [2] \Rightarrow y \equiv 1 [2]$

c. $\begin{cases} -16m + 20 \equiv 14p + 2 [7] \\ -16 \equiv 5 [7] \\ 20 \equiv 6 [14] \\ 14 \equiv 0 [7] \end{cases} \Rightarrow 5m + 6 \equiv 2 [7]$

Corrections Exercice 14

1) a. $2 + x \equiv 4 [6] \Leftrightarrow x \equiv 4 - 2 [6] \Leftrightarrow x \equiv 2 [6] \Rightarrow S = \{2 + 6p, p \in \mathbb{Z}\}$

b. $5 \equiv y - 13 [3] \Leftrightarrow y \equiv 5 + 13 [3] \Leftrightarrow y \equiv 0 [3] \Rightarrow S = \{3n, n \in \mathbb{Z}\}$

2) a. $\begin{cases} n - 47 \equiv 29 [5] \\ -5 \leq n \leq 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 76 [5] \\ -5 \leq n \leq 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 1 [5] \\ -5 \leq n \leq 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 + 5k, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ -5 \leq n \leq 15 \end{cases}$
 $\Rightarrow S = \{-4 ; 1 ; 6 ; 11\}$

b. $x \equiv -4 [9] \Leftrightarrow x \equiv 5 [9] \Leftrightarrow x = 5 + 9k, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{ dans }]100 ; 120[, \text{ on a } S = \{104 ; 113\}$

Corrections Exercice 15

1) a. $2x \equiv 4 \pmod{6}$ On fait le tableau des restes modulo 6

$x \equiv \dots \pmod{6}$	0	1	2	3	4	5
$2x \equiv \dots \pmod{6}$	0	2	4	0	2	4

D'après le tableau, on a $x = 2 + 6k$ ou $x = 5 + 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

b. $3n \equiv 7 \pmod{11}$ D'après le tableau de restes ci-dessous, on a $n \equiv 6 \pmod{11}$ et $S = \{6 + 11k, k \in \mathbb{Z}\}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$3n$	0	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8

c. $x^3 \equiv 4^3 \pmod{7} \equiv 64 \pmod{7} \equiv 1 \pmod{7}$ On fait le tableau des restes modulo 7

$x \equiv \dots \pmod{7}$	0	1	2	3	4	5	6
x^3	0	1	8	27	64	125	216
$x^3 \equiv \dots \pmod{7}$	0	1	1	6	1	6	6

D'après le tableau, on a : $x = 1 + 7k$ ou $x = 2 + 7k$ ou $x = 4 + 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

On écrit $S = \{1 + 7k; 2 + 7n; 4 + 7p, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}\}$

d. $6x + 25 \equiv 56 \pmod{4} \Leftrightarrow 6x \equiv 31 \pmod{4} \Leftrightarrow 6x \equiv 3 \pmod{4}$ On fait le tableau des restes modulo 4

$x \equiv \dots \pmod{4}$	0	1	2	3
$6x \equiv \dots \pmod{4}$	0	2	0	2

D'après le tableau, l'équation $6x \equiv 3 \pmod{4}$ **n'a pas de solution**, car les seuls restes possibles sont 0 et 2

2) $(x + 3)^2$ est un multiple de 4 $\Leftrightarrow (x + 3)^2 \equiv 0 \pmod{4}$

$x \equiv \dots \pmod{4}$	0	1	2	3
$(x + 3)^2$	9	16	25	36
$(x + 3)^2 \equiv \dots \pmod{4}$	1	0	1	0

C'est pour les nombres de la forme $1 + 4n$ et $3 + 4n$, c'est-à-dire en fait, les **nombre impairs**.

3) a.

$x \equiv \dots \pmod{5}$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \dots \pmod{5}$	0	1	4	4	1

b. $x^2 - 5y^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 5y^2 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow x^2 \equiv 3 \pmod{5}$

Or d'après le tableau des restes, il n'est pas possible d'obtenir 3 $\Rightarrow$ **L'équation n'a pas de solution**

Corrections Exercice 16

1) a. Pour $k = 4$, on a $7 \times 4 = 27$ et $28 \equiv 1 [9]$

b. $7x \equiv 5 [9] \xrightarrow{\times 4} 28x \equiv 20 [9]$ Avec $\begin{cases} 28 \equiv 1 [9] \\ 20 \equiv 2 [9] \end{cases}$ donc $1x \equiv 2 [9]$ et $S = \{2 + 9n, n \in \mathbb{Z}\}$

2) a. $3x \equiv 2 [11] \xrightarrow{\times 4} 12x \equiv 8 [11]$ Avec $12 \equiv 1 [11]$ donc $1x \equiv 8 [11]$ et $S = \{8 + 11k, k \in \mathbb{Z}\}$

b. $7x \equiv 13 [15] \xrightarrow{\times 13} 91x \equiv 169 [15]$ Avec $\begin{cases} 91 \equiv 1 [15] \\ 169 \equiv 4 [15] \end{cases}$ donc $x \equiv 4 [15]$ et $S = \{4 + 15n, n \in \mathbb{Z}\}$

c. $5n \equiv -12 [7] \Leftrightarrow 5n \equiv 2 [7] \xrightarrow{\times 10} 50n \equiv 20 [7]$ Avec $\begin{cases} 50 \equiv 1 [7] \\ 20 \equiv 6 [7] \end{cases}$ donc $n \equiv 6 [7]$
et $S = \{6 + 7p, p \in \mathbb{Z}\}$

Corrections Exercice 17

1) a. pour $k = 5$ on a $5k = 25$ et $25 \equiv 1 [6]$.

b. Alors $2a - 7 \equiv 5b [6] \xrightarrow{\times 5} \begin{cases} 10a - 35 \equiv 25b [6] \\ 10 \equiv 4 [6] \\ -35 \equiv 1 [6] \\ 25 \equiv 1 [6] \end{cases} \Rightarrow 4a + 1 \equiv b [6] \text{ ou } b \equiv 4a + 1 [6]$

2) a. $4x - 13 \equiv y + 1 [5] \Leftrightarrow \begin{cases} y \equiv 4x - 14 [5] \\ -14 \equiv 1 [5] \end{cases} \Rightarrow y \equiv 4x + 1 [5]$

Pour exprimer y en fonction de x , il faut multiplier par un entier k tel que $4k \equiv 1 [5] \Rightarrow$ pour $k = 4$

$4x - 13 \equiv y + 1 [5] \xrightarrow{\times 4} \begin{cases} 16x - 52 \equiv 4y + 4 [5] \\ 16 \equiv 1 [5] \\ -52 \equiv 3 [5] \end{cases} \Rightarrow x + 3 \equiv 4y + 4 [5] \Rightarrow x \equiv 4y + 1 [5]$

b. $\begin{cases} 74x - 39y \equiv 27 [5] \\ 74 \equiv 4 [5] \\ -39 \equiv 1 [5] \\ 27 \equiv 2 [5] \end{cases} \Rightarrow 4x + y \equiv 2 [5] \Rightarrow \begin{cases} y \equiv 2 - 4x [5] \\ -4 \equiv 1 [5] \end{cases} \Rightarrow y \equiv x + 2 [5]$

c. on cherche k tel que $3k \equiv 1 [26] \Rightarrow$ pour $k = 9$

$\begin{cases} 3m \equiv 5p - 40 [26] \\ -40 \equiv 12 [26] \end{cases} \Rightarrow 3m \equiv 5p + 12 [26] \xrightarrow{\times 9} \begin{cases} 27m \equiv 45p + 4 [26] \\ 27 \equiv 1 [26] \\ 45 \equiv 19 [26] \\ 108 \equiv 21 [26] \end{cases} \Rightarrow m \equiv 19p + 4 [26]$

on cherche k tel que $5k \equiv 1 [26] \Rightarrow$ pour $k = 21$

$\begin{cases} 3m + 40 \equiv 5p [26] \\ 40 \equiv 14 [26] \end{cases} \Rightarrow 5p \equiv 3m + 14 [26] \xrightarrow{\times 21} \begin{cases} 105p \equiv 63m + 294 [26] \\ 105 \equiv 1 [26] \\ 63 \equiv 11 [26] \\ 294 \equiv 8 [26] \end{cases} \Rightarrow p \equiv 11m + 8 [26]$

d. $2x + 3 \equiv y - 1 [7] \Leftrightarrow 2x \equiv y - 4 [7] \equiv y + 3 [7]$ on cherche k tel que $2k \equiv 1 [7] \Rightarrow$ pour $k = 4$

$$2x \equiv y + 3 [7] \xrightarrow{\times 4} \begin{cases} 8x \equiv 4y + 12 [7] \\ 8 \equiv 1 [7] \\ 12 \equiv 5 [7] \end{cases} \Rightarrow x \equiv 4y + 5 [7]$$

$$\text{Réciproquement : } x \equiv 4y + 5 [7] \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 \equiv 8y + 13 [7] \\ 8 \equiv 1 [7] \\ 13 \equiv -1 [7] \end{cases} \Rightarrow 2x + 3 \equiv y - 1 [7]$$

L'équivalence est vraie

Corrections Exercice 18

$$(S_1) \begin{cases} 5x - y \equiv 6 [3] \\ 2x + 7y \equiv 13 [3] \end{cases} \Rightarrow \times 7 \begin{cases} 35x - 7y \equiv 42 [3] \\ 2x + 7y \equiv 13 [3] \end{cases} \Rightarrow \text{Par addition } 37x \equiv 55 [3] \Rightarrow x \equiv 1 [3]$$

$$\begin{cases} 5x - y \equiv 6 [3] \\ 2x + 7y \equiv 13 [3] \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \times 2 \\ \times -5 \end{matrix} \begin{cases} 10x - 2y \equiv 12 [3] \\ -10x - 35y \equiv -65 [3] \end{cases} \Rightarrow -37y \equiv -53 [3] \Rightarrow -y \equiv -2 [3]$$

Les solutions sont de la forme $\begin{cases} x \equiv 1 [3] \\ y \equiv 2 [3] \end{cases}$

$$(S_2): \begin{cases} 2a \equiv 10 + 3b [7] \\ b \equiv 12 + 6a [7] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 3b \equiv 3 [7] \\ a + b \equiv 5 [7] \end{cases} \Rightarrow \times -2 \begin{cases} 2a - 3b \equiv 3 [7] \\ -2a - 2b \equiv -10 [7] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Par addition } -5b \equiv -7 [7] \Rightarrow 2b \equiv 0 [7] \xrightarrow{\times 4} \begin{cases} 8b \equiv 0 [7] \\ 8 \equiv 1 [7] \end{cases} \Rightarrow b \equiv 0 [7]$$

$$\begin{cases} 2a - 3b \equiv 3 \pmod{7} \\ a + b \equiv 5 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \times 3 \begin{cases} 2a - 3b \equiv 3 \pmod{7} \\ 3a + 3b \equiv 15 \pmod{7} \end{cases} \Rightarrow \text{Par addition } 5a \equiv 18 [7] \Rightarrow 5a \equiv 4 [7]$$

$$\xrightarrow{\times 10} \begin{cases} 50a \equiv 40 [7] \\ 50 \equiv 1 [7] \\ 40 \equiv 5 [7] \end{cases} \Rightarrow a \equiv 5 [7]$$

Les solutions sont de la forme $\begin{cases} a \equiv 5 [7] \\ b \equiv 0 [7] \end{cases}$ mais, sachant que : $\begin{cases} 0 \leq a < 7 \\ 20 \leq b < 27 \end{cases}$ on a $\begin{cases} a = 5 \\ b = 21 \end{cases}$