

Sujet n°2 : Un peu plus solide

Exercice 1 - Asie 2024

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties. Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas. Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2. De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

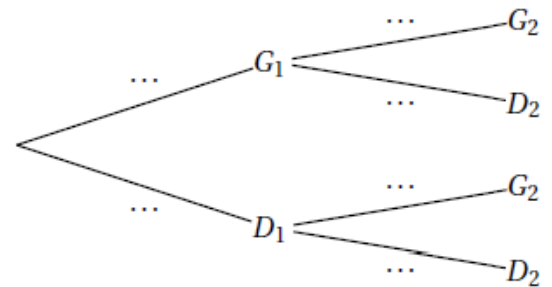
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n -ième partie de la journée »;
- D_n : « Léa perd la n -ième partie de la journée ».

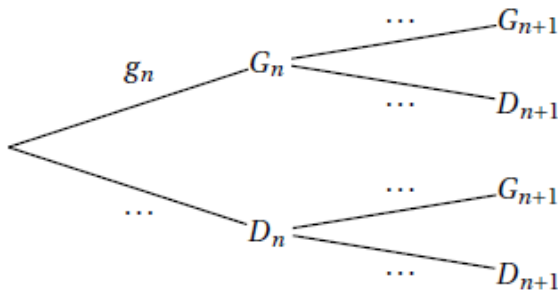
Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n .
On a donc $g_1 = 0,5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?

2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-contre qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2 .



4. Soit n un entier naturel non nul.

a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-contre qui modélise la situation pour les n -ième et $(n + 1)$ -ième parties de la journée.

b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul :

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2$$

5. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n)

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leq 0,001$.

9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1 def seuil(e) :  
2     g = 0.5  
3     n = 1  
4     while ... :  
5         g = 0.5 * g + 0.2  
6         n = ...  
7     return (n)
```

Exercice 2 - Centres étrangers 2024

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère :

- les points $A(-2; 0; 2)$, $B(-1; 3; 0)$, $C(1; -1; 2)$ et $D(0; 0; 3)$.
- la droite $\mathcal{D}_1$ dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
- la droite $\mathcal{D}_2$ dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -1 - 5s \\ z = 2 - 6s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

1. Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC) .

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + 3y + 5z - 8 = 0$.

c. En déduire que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.

3. a. Justifier que la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D .

On admet que la droite $\mathcal{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de C .

b. Démontrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4. a. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC) .

b. Calculer la distance du point D au plan (ABC) . Arrondir le résultat au centième.

Exercice 3 - Amérique du nord 2024

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2$$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

2. Calculer u_1 et u_2 .

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.

7. En déduire une expression de v_n en fonction de n .

8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.

9. Recopier et compléter le script Python ci-contre afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil() :  
    n = 0  
    u = 0.5  
    while u < 0.95 :  
        n = ...  
        u = ...  
    return n
```

Exercice 4 - Métropole 2024

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. a. ~~Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.~~

b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{2x}$$

c. Étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$

d. Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$

2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[1; 2]$ une solution unique qu'on notera α
On admet que l'équation $f(x) = 0$ n'admet que α comme solution sur tout l'intervalle $]0 ; +\infty[$

b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0 ; +\infty[$

c. Montrer que : $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g .

La fonction g est définie sur $]0 ; 1]$ par : $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0 ; 1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0 ; 1]$ puis vérifier que :

$$g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

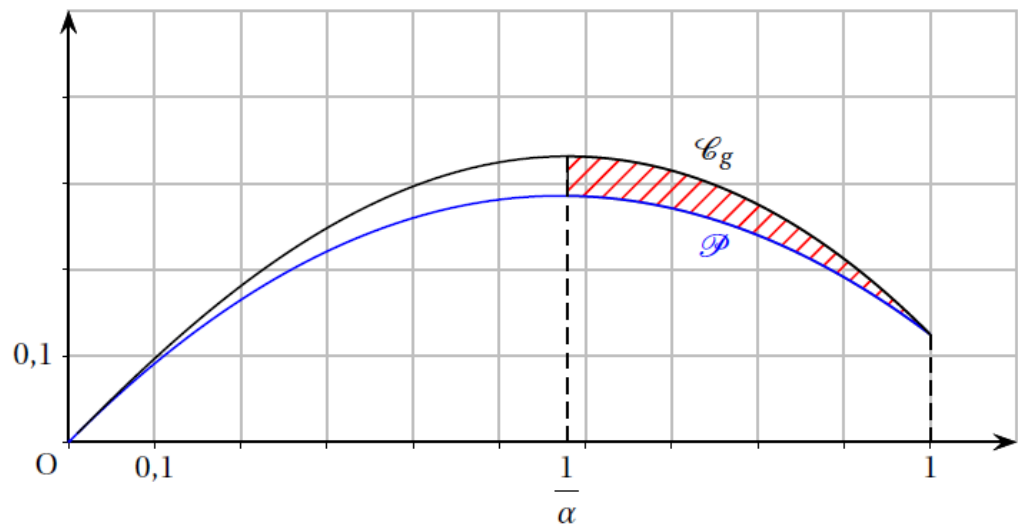
2. a. Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; \frac{1}{\alpha}]$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

b. On admet le tableau de signes suivant :
 En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	+	0	-

Partie C (extrait)

On a représenté sur le graphique ci-dessous :
 — La courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g ;
 — La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.



On souhaite calculer l'aire A du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.
 On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

1. a. Justifier la position relative des courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

(Le reste des questions est hors programme pour le bac blanc...)