

Savoirs Vp.1 : Produit scalaire et orthogonalité

Exercice 1 : Produit scalaire dans l'espace

- Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(-1; 2; 4)$; $B(0; 3; -2)$ et $C(5; -1; 3)$.
 - Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$.
 - Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- Soit un cube $ABCDEFGH$, de côté 1, avec I et J milieux de $[EF]$ et $[FG]$.
 - Sans utiliser de repère, déterminer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CB}$.
 - On considère le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ}$.

Exercice 2 : Calcul de longueurs et d'angles

Dans ces exercices, on utilisera la table des cosinus donnée en encadré

α	30°	45°	60°	120°	135°	150°
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points :
 $A(-1; 2; 4)$; $B(0; 3; -2)$ et $C(5; -1; 3)$.
 - Déterminer une mesure arrondie, au dixième de degré près, de l'angle $\widehat{BAC}$.
 - Soit M un point tel que $\widehat{CBM} = 30^\circ$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BM} = 5$. Calculer la longueur BM .
- On considère un cube $ABCDEFGH$ et on se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
 - Calculer l'angle $\widehat{CAH}$. En déduire la nature du triangle AHC .
 - Calculer l'angle $\widehat{BAH}$.
 - Soit I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[EH]$ et $[AE]$. Calculer l'angle $\widehat{IJK}$.

Exercice 3 : Vecteur orthogonal

- Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les vecteurs $\vec{u}(4; 12; 2)$ et $\vec{v}(-3; 5; 7)$.
 Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?
- Soient les vecteurs $\vec{n}(k; -2; k-1)$ et $\vec{s}(2; k; k)$. Pour quel(s) valeur(s) de k sont-ils orthogonaux ?
- Déterminer les coordonnées d'un vecteur orthogonal au vecteur $\vec{w}(-2; 3; 1)$.
- $\vec{a}(2; x; -3)$ et $\vec{b}(y; -2; 4)$. Déterminer des valeurs x et y tels que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ soient orthogonaux.

Exercice 4 : Droites orthogonales, perpendiculaires...

- Soit les droites d et d' définies par : $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - t \end{cases}$ et $d' : \begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = -2 + 5t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$
 Montrer que les droites sont orthogonales.
 - On donne les points $A(-2; 3; 1)$; $B(-5; 4; 3)$ et $C(1; 2; 6)$.
 Les droites (AB) et (AC) sont-elles orthogonales ? Perpendiculaires ?

c) On donne les points $E(1; 2; 0)$; $F(4; 0; 1)$ et $G(2; -1; 0)$.

Les droites (EF) et (EG) sont-elles orthogonales ? Perpendiculaires ?

d) Soit la droite d définie par la représentation paramétrique : $d : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

On considère les points les points $P(-1; 3; 0)$ et $M(-1; 4; 3)$.

Démontrer que les droites d et (PM) sont perpendiculaires.

2) Dans un repère, on donne les points $A(2; 1; -1)$; $B\left(\frac{3}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right)$ et $C(3; 5; 0)$.

a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .

b) Déterminer une mesure arrondie, au degré près, de l'angle $\widehat{ABC}$

3) On considère un cube $ABCDEFGH$. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (EC) est orthogonale à la droite (BD) ainsi qu'à la droite (BG) .

Que peut-on en conclure sur la position relative de la droite (EC) et du plan (BDG) ?

4) ABCD est un tétraèdre régulier de côté 1, et J est le milieu de $[AB]$.

a) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

b) Montrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.