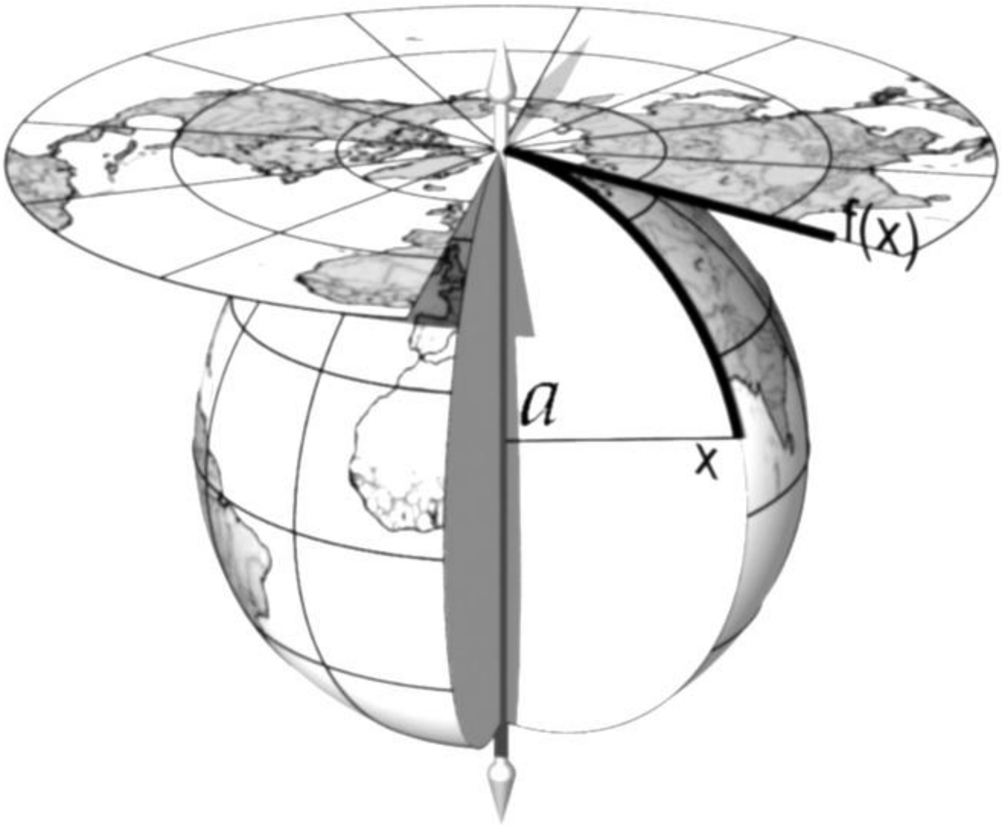
Chapitre 2 — 2ème partie

Vecteurs et Produit Scalaire

Savoirs

1ère partie

Vps. 1	Calculs dans un repère
Vps. 2	Techniques de calcul vectoriel
Vps. 3	Décomposition dans une base



2ème partie

Colinéarité, calculs	**Vps. 4**
Colinéarité, applications, parallélisme et alignement	**Vps. 5**
Produit Scalaire - Calcul	**Vps. 6**
Produit Scalaire - Orthogonalité	**Vps. 7**

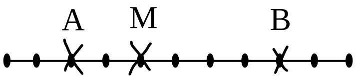
EXERCICES en classe

Approche de la colinéarité

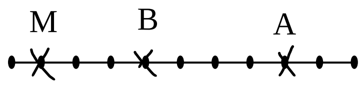
Exercice A : Sur une droite

1) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

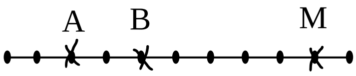
a.



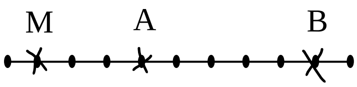
b.



c.

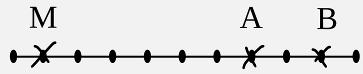


d.

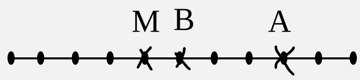


Besoin de plus d'entraînement ?

a.

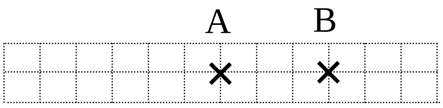


b.

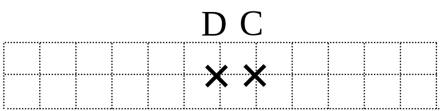


2) Construire le point M vérifiant l'égalité vectorielle donnée :

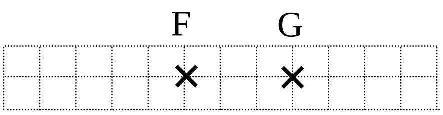
a. $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}$



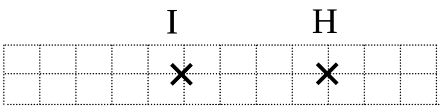
b. $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CD}$



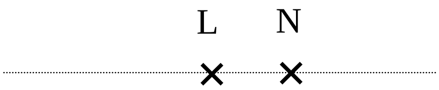
c. $\overrightarrow{FM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$



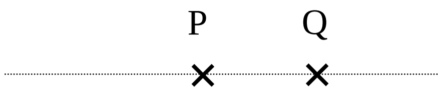
d. $\overrightarrow{HM} = \frac{5}{4}\overrightarrow{HI}$



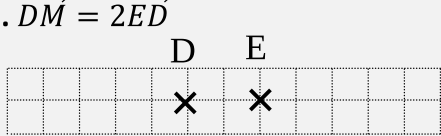
e. $\overrightarrow{LM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{NL}$



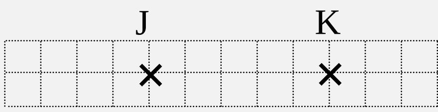
f. $3\overrightarrow{PM} = -4\overrightarrow{PQ}$



a. $\overrightarrow{DM} = 2\overrightarrow{ED}$

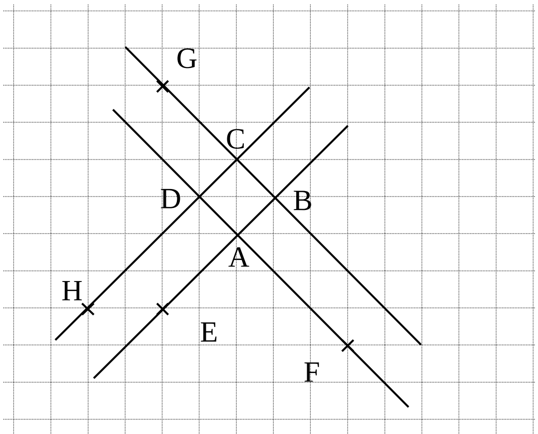


b. $\overrightarrow{JM} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{JK}$



c. $\overrightarrow{RI} = -3\overrightarrow{SI}$

3) Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré.



Déterminer graphiquement :
- si les vecteurs sont colinéaires
- si oui, la relation vectorielle qui les lie

a) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ **b)** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}$ **c)** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HD}$

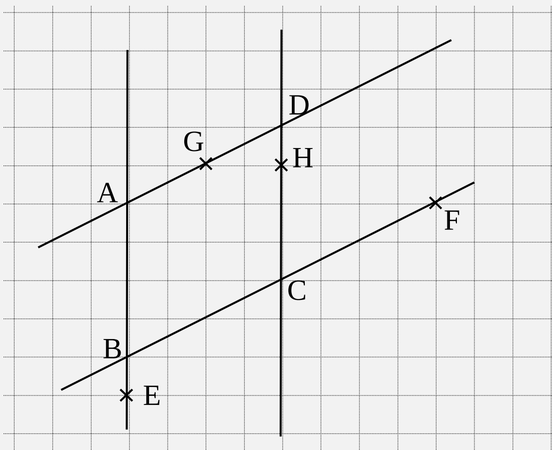
d) $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{GC}$ **e)** $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AE}$ **f)** $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{GC}$

2) Sur la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme.

Déterminer graphiquement, si les vecteurs sont colinéaires, la relation vectorielle entre :

a) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ **b)** $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{DG}$ **c)** $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CF}$

d) $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EA}$ **e)** $\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{HC}$ **f)** $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AE}$



Savoir Vps. 4 : Colinéarité - Calculs

Exercice 1 : Colinéarité - Proportionnalité

1) En vérifiant la proportionnalité des coordonnées, déterminer dans chaque cas si les vecteurs sont colinéaires, et, si oui, donner leur relation de colinéarité :

a. Les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$

b. Les vecteurs $\vec{c}\begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}-7\\3\end{pmatrix}$

c. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ quand $A(4;2)$; $B(10;\ -5)$ et $C(-8;16)$

d. Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{EC}$ quand $C(1;\ -2)$; $D(-4;2)$ et $E(16;\ -13)$

Besoin de plus d'entraînement ?

Mêmes questions

a. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}15\\10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ quand $A(3;\ -1)$; $B(7;\ -7)$ et $C(5;-4)$

c. Les vecteurs $\vec{a} = -3\vec{\imath} + 6\vec{\jmath}$ et $\vec{b} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ dans la base $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

d. Les vecteurs $\vec{u} = 9\overrightarrow{TE} - 3\overrightarrow{DE}$ et $\vec{v} = 6\overrightarrow{DT} - 4\overrightarrow{DE}$ dans la base $\left(\overrightarrow{DE};\ \overrightarrow{DT}\right)$

2) Mêmes questions, en commençant par déterminer les coordonnées des vecteurs dans la base donnée…

a. Les vecteurs $\vec{a} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ et $\vec{b} = 2\vec{\jmath} - 4\vec{\imath}$ dans la base $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

b. Les vecteurs $\vec{u} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 10\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right)$

c. Les vecteurs $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{RT} + 3\overrightarrow{SR}$ et $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{TS} + \overrightarrow{RT}$ dans la base $\left(\overrightarrow{RT};\ \overrightarrow{RS}\right)$

Exercice 2 : Colinéarité - Déterminant

1) En calculant le déterminant, dire dans chaque cas si les vecteurs sont colinéaires, et, si oui, donner leur relation de colinéarité :

a. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}14\\8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-21\\-12\end{pmatrix}$

b. Les vecteurs $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{a}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$

c. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AP}$ quand $A(9;\ -17)$; $M(6;-9)$ et $P(-6;\ 23)$

d. Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{EF}$ quand $B(0;\ -4)$; $E(6;\ -13)$ et $F(-4;2)$

Besoin de plus d'entraînement ?

Mêmes questions

a. Les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}-10\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}25\\-5\end{pmatrix}$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{ST}$ quand $R(-12;16)$; $S(18;41)$ et $T(6;30)$

c. Les vecteurs $\vec{c} = -4\vec{u} + 3\vec{v}$ et $\vec{d} = 12\vec{u} - 9\vec{v}$ dans la base $(\vec{u};\ \vec{v})$

d. Les vecteurs $\vec{\imath} = -6\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right)$

2) Mêmes questions, en commençant par déterminer les coordonnées des vecteurs dans la base donnée…

a. Les vecteurs $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $\vec{b} = 18\vec{\jmath} - 6\vec{\imath}$ dans la base $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$

b. Les vecteurs $\vec{u} = 4\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OP}$ et $\vec{v} = 2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OP}$ dans la base $\left(\overrightarrow{OM};\ \overrightarrow{OP}\right)$

c. Les vecteurs $\overrightarrow{SA} = 3\overrightarrow{SE} + 5\overrightarrow{TS}$ et $\overrightarrow{TB} = 2\overrightarrow{TS} - 3\overrightarrow{TE}$ dans la base $\left(\overrightarrow{ES};\ \overrightarrow{ET}\right)$

Exercice 3 : Colinéarité - paramètres

Dans chaque cas, déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires

a) $\vec{u}(2\ ;\ 6)$ et $\vec{v}(m\ ;\ 3)$ **b)** $\vec{u}(-m\ ;\ 0)$ et $\vec{v}(1\ ;\ -3)$ **c)** $\vec{u}(12\ ;\ 2m)$ et $\vec{v}(2m\ ;\ 3)$

Savoir Vps. 5 : Colinéarité - Applications

Exercice 3 : Application dans un repère

1) Dans un repère, on donne les points suivants :
$A(7;5)$; $B(5;0)$; $C(4;\ -3)$; $D(3;\ -5)$; $E(-11;\ -1)$; $F(-2;2)$ et $G(-2\ ;\ -1)$

a. Les points A, B et D sont-ils alignés ? Que peut-on déduire sur la nature de B ?

b. Les droites (EF) et (GB) sont-elles parallèles ?

c. Le point C appartient-il à la droite (AB) ?

d. Montrer que le quadrilatère $BDEF$ est un trapèze de bases $[DE]$ et $[BF]$

Besoin de plus d'entraînement ?

Dans un repère (O, I, J) on donne les points :
$M(-6;5)$; $N(-3;7)$; $P(0;5)$; $R(6;\ -3)$; $S(-8;\ -1)$ et $T(8;\ 3)$

a. Montrer que les droites (MR) et (NP) sont parallèles.

b. Montrer que les points S, J et T Sont alignés. Que peut-on dire de plus sur eux ?

2) Soit ABC un triangle et trois points P, Q et R tels que : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

a. Faire une figure (à main levée).

b. Exprimer$\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ en fonction de $\overrightarrow{CR}$ et $\overrightarrow{CQ}$.

c. Montrer que $\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{CR} + 2\overrightarrow{CQ}$

d. En En vous plaçant dans le repère $(C\ ;\ \overrightarrow{CR}\ ;\ \overrightarrow{CQ})$, démontrer que P, Q et R sont alignés.

Exercice 4 : Applications - paramètres

1) On donne : $A(-1\ ;-4)$, $B(-3\ ;\ 5)$, $C(2\ ;\ 2)$ et $M(-2\ ;\ y)$.
Pour quelle valeur de y les droites (AB) et (CM) sont-elles parallèles ?

2) On donne : $A(-7\ ;\ 2)$ et $B(4\ ;\ 3)$.
Pour quelle valeur de x les points A, B et $M(x\ ;\ 1)$ sont-ils alignés ?

3) On se place dans un repère orthonormé (O, I, J). On donne le point $C(2\ ;\ 5)$ et le vecteur $\vec{u}(1\ ;-1)$.

a. Déterminer le nombre réel m pour que le point $D(m\ ;\ 7)$ soit placé de manière à ce que $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

b. Pour cette valeur de m, on considère les points A et B définis par leurs coordonnées : $A(1+t\ ;\ 3)$ et $B(4\ ;t)$, où t est un réel.
Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et ce pour toutes les valeurs du nombre t.

Exercice 5 : Synthèse

$ABCD$ est un parallélogramme. Les points I et J sont tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et le point Kest tel que C soit le milieu de $[BK]$.

a) Faire une figure.

b) Déterminer les coordonnées de I, J et K dans le repère $(C\ ; \overrightarrow{CJ}; \overrightarrow{CB})$.

c) Démontrer que I, J et K sont alignés.

Savoir Vps. 6 : Produit scalaire - Calculs

Exercice 6 : Calcul de produits scalaire

1) Dans une base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$;
$\vec{a} = 4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$ et $\vec{b} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

Calculer : **a.** $\vec{u}.\vec{v}$ **b.** $\vec{a}.\vec{b}$ **c.** $\vec{u}^2$ **d.** $\|\vec{b}\|$

2) On donne $A\ (-5\,;1), B\ (-3\,;-4)$; $C\ (2;5)$ et $D\ (1\,;-6)$. Calculer :

a. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ **b.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$ **c.** $\overrightarrow{CB}^2$ **d.** DC

Besoin de plus d'entraînement ?

1) On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

Calculer : **a.** $3\vec{u}.5\vec{v}$ **b.** $\vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
c. $(2\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + 3\vec{w})$

2) On donne $M\ (-5\,;1), A\ (-3\,;-4)$; $T\ (2;5)$ et $H\ (1\,;6)$. Calculer :

a. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MT}$ **b.** $\|\overrightarrow{TH}\|$ **c.** $\overrightarrow{TA}^2$

Exercice 7 : Orthogonalité dans un repère

1) On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

a. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?
b. Et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$?

Besoin de plus d'entraînement ?

On donne dans une base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$:
$\vec{a}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$; $\vec{b} = -3\vec{\imath} + 12\vec{\jmath}$; $P(-1;7)$ et $S(0;2)$

a. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont-ils orthogonaux ?
b. Et les vecteurs $\vec{a}$ et $\overrightarrow{PS}$?

2) Dans un repère orthonormé, on a $E(4;\ -5)$; $F(-2;7)$; $G(-3;\ -6)$ et $H(7;\ -1)$

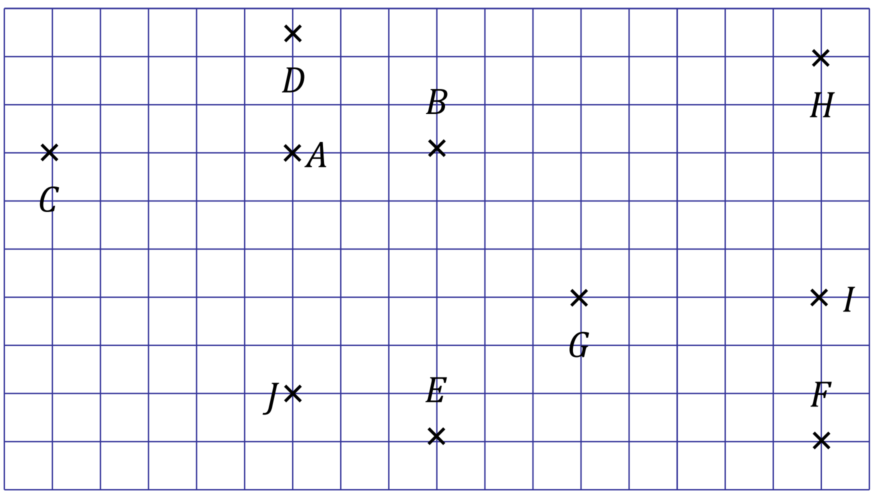
a. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ sont-ils orthogonaux ?

b. Même question pour $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{HE}$

Exercice 8 : « Rappels » sur les projeté orthogonaux

Construire les projetés orthogonaux suivants (s'il s'agit d'un point déjà défini, préciser ce point)

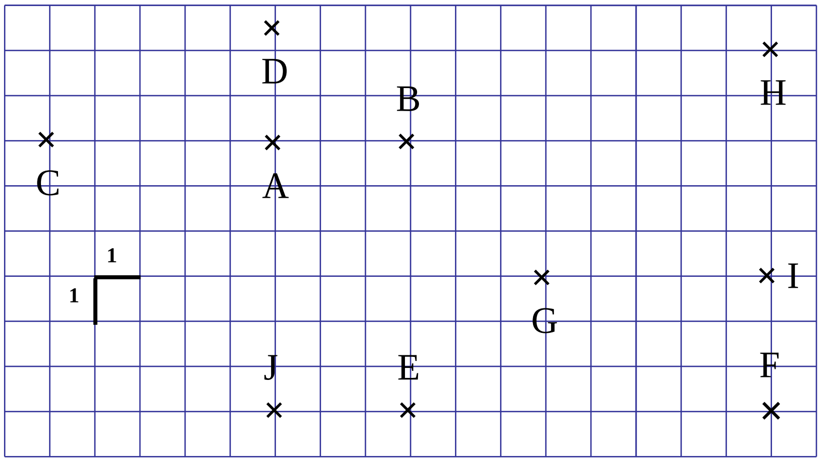
a. M = projeté de D sur (CB)
b. N = projeté de G sur (AJ)
c. P = projeté de C sur (GI)
d. Q = projeté de F sur (BE)
e. R = projeté de B sur (EH)
f. S = projeté de F sur (IH)
g. T = projeté de I sur (GH)



Exercice 9 : Produit scalaire avec projeté orthogonal

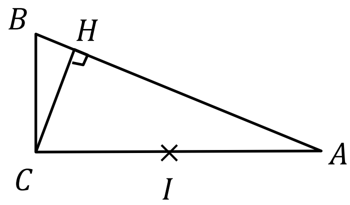
1) a. Déterminer la longueur de la diagonale d'un petit carré de quadrillage

b. Déterminer les produits scalaires suivants :



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}$	$\overrightarrow{HG}.\overrightarrow{BG}$	$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{HI}$
$\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{HI}$	$\overrightarrow{JE}.\overrightarrow{FJ}$	$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{JE}$
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EF}$	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IF}$	$\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{GH}$

2) Le triangle ABC est rectangle en C.
Le point I est le milieu de $[AC]$. (CH) est la hauteur issue de C.
On a $AC = 156$, $BA = 169$ et $BH = 25$



a. Déterminer :
- le projeté orthogonal de A sur (CB)
- le projeté orthogonal de B sur (CH)
- le projeté orthogonal de I sur (AC)
- le projeté orthogonale de I sur (BC)
- le projeté orthogonal de C sur (AB)

b. Calculer les longueurs BC, CH et AH

c. Calculer : • $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC}$ • $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA}$ • $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AI}$ •$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HB}$ •$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CH}$ • $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB}$ • $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}$

Exercice 10 : Paramètres

1) Dans chaque cas est-il possible de déterminer un réel k pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux ?

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}k\\-2\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{u}\begin{pmatrix}2k\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-k\\3\end{pmatrix}$

2) Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$sont orthogonaux, pour tous réels a et b.

Exercice 11 : Propriétés des produits scalaires

1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u}.\vec{v} = 5$. Calculer :

a. $(\vec{u}+\vec{v})^2$ **b.** $(\vec{u}-\vec{v})^2$ **c.** $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$

2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 1$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ et $\vec{u}.\vec{v} = -3$. Calculer :

a. $(3\vec{u}-2\vec{v})^2$ **b.** $(4\vec{u}-3\vec{v}).(\vec{u}+2\vec{v})$

3) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs qui vérifient $\vec{u}^2 = 2$; $\vec{v}^2 = 5$ et $\vec{u}.\vec{v} = -2$

Montrer que les vecteurs $(2\vec{u}+\vec{v})$ et $(-\vec{u}+2\vec{v})$ sont orthogonaux.

Savoir Vps. 7 : Produit scalaire - Orthogonalités

Exercice 12 : Dans un repère

1) On donne dans un repère orthonormé :
$A(-2\,;-3)$; $B(1\,;\,1)$; $C(-3\,;-1)$; $D(-4\,;\,2)$;
$E(-1\,;-3)$ et $F(2\,;-1)$.

a. Le triangle ABC est-il rectangle en C ?

b. Les droites (FE) et (DE) sont-elles perpendiculaires ?

2) Soit EFG un triangle rectangle et isocèle en F et K le milieu de $[EF]$. On définit les points M et P par les relations vectorielles :
$\overrightarrow{EP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FE} - \frac{3}{2}\overrightarrow{GF}$.

On se place dans la base orthonormée $(\overrightarrow{FE}; \overrightarrow{FG})$

a. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{FM}$ et de $\overrightarrow{EG}$ dans la base.

b. En déduire que, dans le triangle EFG, la droite (FM) est la hauteur issue de F.

c. Le triangle KGM est-il rectangle en G ?

d. Les droites (EF) et (PM) sont-elles perpendiculaires ?

Besoin de plus d'entraînement ?

1) On a $M(1\,;7)$; $P(-5\,;5)$ et $S(4\,;-2)$ dans un repère orthonormé.

Montrer que le triangle MPS est rectangle en M

2) $(A, B; C)$ forme un repère orthonormé.

On définit les points S, T, U et W par :

$\overrightarrow{AW} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BU} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{ST} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

Monter que les droites (ST) et (UW) sont perpendiculaires.

Exercice 13 : Synthèses

1) Dans un carré direct $ABCD$, on considère les points I et J définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$.
Un point M décrit le segment $[DC]$. On pose $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DC}$

a. Dans la base $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD})$, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BM}$ en fonction de x

b. Déterminer x pour que les des droites (IJ) et (BM) soient perpendiculaires.

2) Soit ABC un triangle direct rectangle et isocèle en A.
Les points R, S et T sont les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AB]$ et $[CS]$.
Démontrer que la médiane (AT) du triangle ACS est une hauteur du triangle ARB.

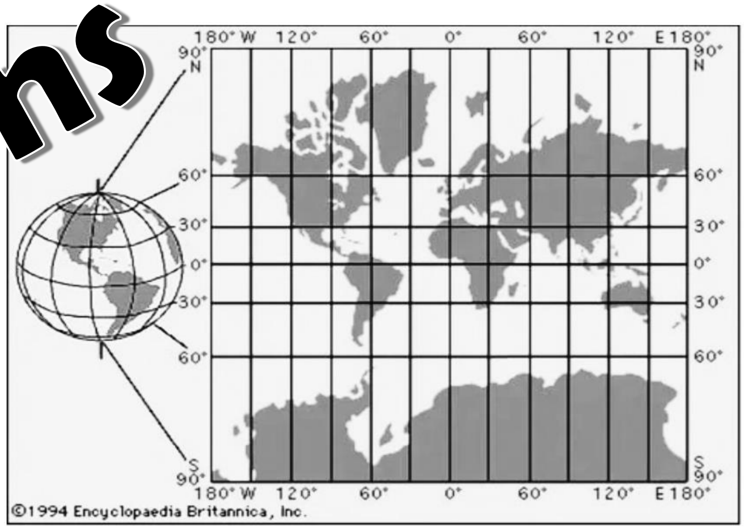
3) On considère un carré $ABCD$, et les points K et L tels que $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

a. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

b. Montrer que $\overrightarrow{KC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ et que $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

c. Développer et réduire $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{DL}$, puis conclure…

Corrections



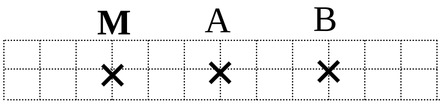
Corrections Approche de la colinéarité

Corrigé Exercice A

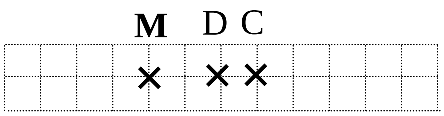
1) a. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **b.** $\overrightarrow{AM} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AB}$ **c.** $\overrightarrow{AM} = \frac{7}{2}\overrightarrow{AB}$ **d.** $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

a. $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB}$ **b.** $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

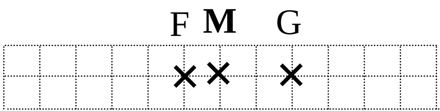
2) a.



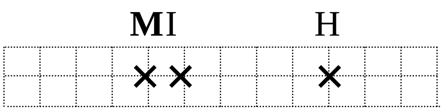
b.



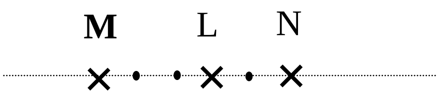
c.



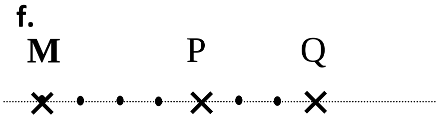
d.



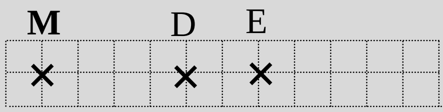
e.



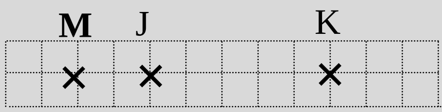
f.



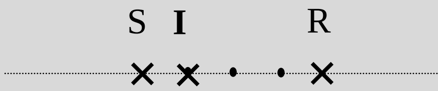
a.



b.



c.



3) On obtient :

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$ ou $\overrightarrow{BE} = -3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HD}$ ou $\overrightarrow{HD} = 3\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{GC}$

$\overrightarrow{DA}$ *et* $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires ;

$\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GC}$ ou $\overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

On obtient :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{DG}$

$\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{CF}$ ou $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{CD} = \frac{4}{5}\overrightarrow{EA}$ ou $\overrightarrow{EA} = \frac{5}{4}\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{HD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$ ou $\overrightarrow{HC} = -3\overrightarrow{HD}$

$\overrightarrow{CH} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AE}$ ou $\overrightarrow{AE} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{CH}$

Corrections Savoir Vps. 4

Corrigé Exercice 1

1) a. On a $\frac{x_{\vec{b}}}{x_{\vec{a}}} = \frac{6}{-3} = -2$ et $\frac{y_{\vec{b}}}{y_{\vec{a}}} = \frac{-10}{5} = -2$ Donc $\frac{x_{\vec{b}}}{x_{\vec{a}}} = \frac{y_{\vec{b}}}{y_{\vec{a}}}$ ⇒ les vecteurs sont **colinéaires** et $\boldsymbol{\vec{b} = -2\vec{a}}$

(ou $\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b}$)

b. On a $\frac{x_{\vec{d}}}{x_{\vec{c}}} = \frac{-7}{6} \simeq -1{,}2$ et $\frac{y_{\vec{d}}}{y_{\vec{c}}} = \frac{3}{-14} \simeq -0{,}21$ Donc $\frac{x_{\vec{d}}}{x_{\vec{c}}} \neq \frac{y_{\vec{d}}}{y_{\vec{c}}}$ ⇒ les vecteurs ne sont **pas colinéaires**

c. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -12 \\ 14 \end{pmatrix}$ On voit que $\boldsymbol{\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}}$, les vecteurs sont **colinéaires**

(avec calculs : $\frac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{-12}{6} = -2$ et $\frac{y_{\vec{b}}}{y_{\vec{a}}} = \frac{14}{-7} = -2$)

d. On a $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} -15 \\ 11 \end{pmatrix}$; $\frac{x_{\overrightarrow{EC}}}{x_{\overrightarrow{DC}}} = \frac{-15}{5} = -3$ et $\frac{y_{\overrightarrow{EC}}}{y_{\overrightarrow{DC}}} = \frac{11}{-4} \neq -3$ Donc $\frac{x_{\overrightarrow{EC}}}{x_{\overrightarrow{DC}}} \neq \frac{y_{\overrightarrow{EC}}}{y_{\overrightarrow{DC}}}$

⇒ les vecteurs ne sont **pas colinéaires**

2) a. On a : $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ On voit que $\boldsymbol{\vec{b} = -2\vec{a}}$ (avec calculs : $\frac{x_{\vec{b}}}{x_{\vec{a}}} = \frac{-4}{2} = -2$ et $\frac{y_{\vec{b}}}{y_{\vec{a}}} = \frac{2}{-1} = -2$)

donc les vecteurs sont **colinéaires**

b. On a $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\frac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}} = \frac{10}{5} = 2$ et $\frac{y_{\vec{v}}}{y_{\vec{u}}} = \frac{3}{2}$ Donc $\frac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}} \neq \frac{y_{\vec{v}}}{y_{\vec{u}}}$ ⇒ les vecteurs ne sont **pas colinéaires**

c. On a $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{RT} + 3\overrightarrow{SR} = 2\overrightarrow{RT} - 3\overrightarrow{RS}$ donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{TS} + \overrightarrow{RT} = 3\overrightarrow{TR} + 3\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT} = -2\overrightarrow{RT} + 3\overrightarrow{RS}$ donc $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

On a $\boldsymbol{\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AM}}$ donc les vecteurs sont **colinéaires**

a. On a $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{15}{-6} = -\frac{5}{2}$ et $\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}$ Donc $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}}$ Les vecteurs sont **colinéaires** et $\boldsymbol{\vec{u} = -\frac{5}{2}\vec{v}}$

(ou $\vec{v} = -\frac{2}{5}\vec{u}$)

b. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ⇒ On a $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}}$ **: colinéaires**

c. $\vec{a}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ Alors $\frac{x_{\vec{a}}}{x_{\vec{b}}} = -\frac{3}{2}$ et $\frac{y_{\vec{a}}}{y_{\vec{b}}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ Donc $\frac{x_{\vec{a}}}{x_{\vec{b}}} \neq \frac{y_{\vec{a}}}{y_{\vec{b}}}$ ⇒ **non colinéaires**

d. $\vec{u} = 9\overrightarrow{TD} + 9\overrightarrow{DE} - 3\overrightarrow{DE} = 6\overrightarrow{DE} - 9\overrightarrow{DT}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$et $\vec{v} = -4\overrightarrow{DE} + 6\overrightarrow{DT} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

On a $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$ et $\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}$ Donc $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}}$ Les vecteurs sont **colinéaires** et $\boldsymbol{\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{v}}$

(ou $\vec{v} = -\frac{2}{3}\vec{u}$)

Corrigé Exercice 2

1) **a.** $Det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 14 \times (-12) - 8 \times (-21) = -168 + 168 = 0$

Donc les vecteurs sont **colinéaires** et $\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{14}{-21}\vec{v} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\vec{\boldsymbol{v}}$

b. $Det(\vec{w}\,;\,\vec{a}) = 25 - 24 = 1 \neq 0$ $\Rightarrow$ Les vecteurs ne sont pas **colinéaires**

c. On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}-15\\40\end{pmatrix}$ et $Det\left(\overrightarrow{AM};\,\overrightarrow{AP}\right) = -120 - (-120) = 0$

Les vecteurs sont **colinéaires** et $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \mathbf{5}\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}$

d. $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-10\\15\end{pmatrix}$ On a $Det\left(\overrightarrow{BE};\,\overrightarrow{EF}\right) = 90 - 90 = 0$

Les vecteurs sont **colinéaires** et $\overrightarrow{\boldsymbol{BE}} = \frac{6}{-10}\overrightarrow{EF} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\overrightarrow{\boldsymbol{EF}}$

2) **a.** $\vec{a}\left(\frac{2}{3}\,;\,-2\right)$ et $\vec{b}(-6\,;18)$ alors $Det\left(\vec{a}\,;\,\vec{b}\right) = \frac{2}{3} \times 18 - 12 = 0$

Les vecteurs sont **colinéaires** et $\vec{\boldsymbol{b}} = \frac{18}{-2}\vec{a} = -\mathbf{9}\vec{\boldsymbol{a}}$

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = -2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ Alors $Det(\vec{u};\,\vec{v}) = -4 - 4 = -8 \neq 0$ $\Rightarrow$ vecteurs **non colinéaires**

c. $\overrightarrow{SA} = -3\overrightarrow{ES} + 5\overrightarrow{TE} + 5\overrightarrow{ES} = 2\overrightarrow{ES} - 5\overrightarrow{TE} = \begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{TB} = 2\overrightarrow{TE} + 2\overrightarrow{ES} + 3\overrightarrow{ET} = 2\overrightarrow{ES} + \overrightarrow{ET} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Alors $Det\left(\overrightarrow{SA};\,\overrightarrow{TB}\right) = 2 + 10 = 12 \neq 0$ $\Rightarrow$ vecteurs **non colinéaires**

a. Les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}-10\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}25\\-5\end{pmatrix} \Rightarrow Det\left(\vec{a}\,;\,\vec{b}\right) = 50 - 50 = 0$ $\Rightarrow$ Vecteurs **colinéaires** et $\vec{\boldsymbol{a}} = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\vec{\boldsymbol{b}}$

b. $\overrightarrow{RS}\begin{pmatrix}30\\25\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}-12\\-11\end{pmatrix} \Rightarrow Det\left(\overrightarrow{RS};\,\overrightarrow{ST}\right) = -330 + 300 = -30 \neq 0$ $\Rightarrow$ vecteurs **non colinéaires**

c. $\vec{c}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix} \Rightarrow$ $Det\left(\vec{c}\,;\,\vec{d}\right) = 36 - 36 = 0$ $\Rightarrow$ Vecteurs **colinéaires** et $\vec{\boldsymbol{d}} = -\mathbf{3}\vec{\boldsymbol{c}}$

d. $\vec{\imath} = -6\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} - 8\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}\frac{-1}{2}\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $Det(\vec{\imath};\,\vec{\jmath}) = 4 - \frac{8}{2} = 0$ $\Rightarrow$ Vecteurs **colinéaires** et $\vec{\boldsymbol{\imath}} = -\mathbf{4}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$

Exercice 3

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}m\\3\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $Det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 6 - 6m$ Pour que $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ soient colinéaires, il faut que $Det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$ $\Leftrightarrow$ $6 - 6m = 0$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{m} = \mathbf{1}$

b) $Det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 3m$ donc $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $Det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$ $\Leftrightarrow$ $3m = 0$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$

c) $\vec{u}(12\,;\,2m)$ et $\vec{v}(2m\,;\,3)$ $Det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 36 - 4m^2$ donc $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $Det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$ $36 - 4m^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ $m^2 = 9$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{m} = -\mathbf{3}$ **ou** $\boldsymbol{m} = \mathbf{3}$

Corrections Savoir Vps. 5

Corrigé Exercice 3

1) a. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4\\-10\end{pmatrix}$ On a $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$: les vecteurs sont colinéaires, donc les points $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ **et** $\boldsymbol{D}$ **sont alignés.**

On a même $\boldsymbol{B}$ **milieu de** $[\boldsymbol{AD}]$

b. On a $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$

et $Det(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{GB}) = 9 - 21 = -12 \neq 0$

Les droites $(\boldsymbol{EF})$ **et** $(\boldsymbol{GB})$ **ne sont pas parallèles.**

a. $\overrightarrow{MR}\begin{pmatrix}12\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{NP}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

On a $Det(\overrightarrow{MR};\overrightarrow{NP}) = -24 + 24 = 0$

les vecteurs sont colinéaires, donc les droites $(\boldsymbol{MR})$ **et** $(\boldsymbol{NP})$ **sont parallèles**

b. Rappel : $J(0;1)$ dans le repère (O, I, J)

$\overrightarrow{SJ}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}16\\4\end{pmatrix}$ On a $\overrightarrow{ST} = 2\overrightarrow{SJ}$: les vecteurs sont colinéaires, donc les points $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{J}$ **et** $\boldsymbol{T}$ **sont alignés. On a même** $\boldsymbol{J}$ **milieu de** $[\boldsymbol{ST}]$

c. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-8\end{pmatrix}$ et $Det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 16 - 15 = 1 \neq 0$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ **et** $\boldsymbol{C}$ **ne sont pas alignés,** $\boldsymbol{C}$ **n'appartient pas à** $(\boldsymbol{AB})$

d. Montrer que le quadrilatère $BDEF$ est un trapèze de bases $[DE]$ et $[BF]$

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-14\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}$ On a $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{DE}$: les vecteurs sont colinéaires, donc les droites (DE) et (BF) sont parallèles et le quadrilatère $\boldsymbol{BDEF}$ **est bien un trapèze de bases** $[\boldsymbol{DE}]$ **et** $[\boldsymbol{BF}]$

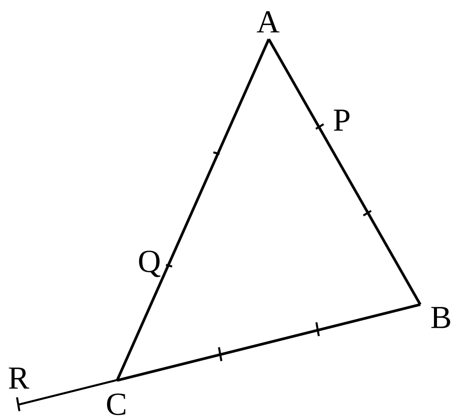
2) **a.** $\Rightarrow$

b. $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{CR} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CR}$

c. $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{CQ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CQ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

$= 3\overrightarrow{CQ} + \frac{1}{3}(-3\overrightarrow{CQ}) + \frac{1}{3}(-3\overrightarrow{CR}) = \overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{CR}$

$= \boldsymbol{-\overrightarrow{CR} + 2\overrightarrow{CQ}}$ **CQFD**



d. Dans $(C\,;\,\overrightarrow{CR}\,;\,\overrightarrow{CQ})$, on a $R(1\,;0)$; $Q(0\,;1)$

et comme $\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{CR} + 2\overrightarrow{CQ}$ alors $P(-1\,;2)$

On a $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PQ}$ les vecteurs sont colinéaires, les points sont alignés (on a même Q milieu de $[PR]$

Corrigé Exercice 4

1) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}-4\\y-2\end{pmatrix}$ Donc $Det(\overrightarrow{AB};\,\overrightarrow{CM}) = \begin{vmatrix}-2 & -4\\9 & y-2\end{vmatrix} = -2(y-2) + 36 = -2y + 40$

Pour que (AB) et (CM) soit parallèles, on doit avoir $Det(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CM}) = 0 \Leftrightarrow -2y + 40 = 0 \Leftrightarrow y = 20$

$(\boldsymbol{AB})$ **et** $(\boldsymbol{CM})$ **sont donc parallèles pour** $\boldsymbol{y = 20}$.

2) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+7\\-1\end{pmatrix}$ Donc $Det(\overrightarrow{AB};\,\overrightarrow{AM}) = \begin{vmatrix}11 & x+7\\1 & -1\end{vmatrix} = -11 - x - 7 = -x - 18$

Pour que A, B et M soit parallèles, on doit avoir $Det(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AM}) = 0 \Leftrightarrow -x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 18$

Les points $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ **et** $\boldsymbol{M}$**sont alignés pour** $\boldsymbol{x = 18}$

3) a. On a $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} m-2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si $Det(\overrightarrow{CD}\ ;\ \vec{u}) = 0$

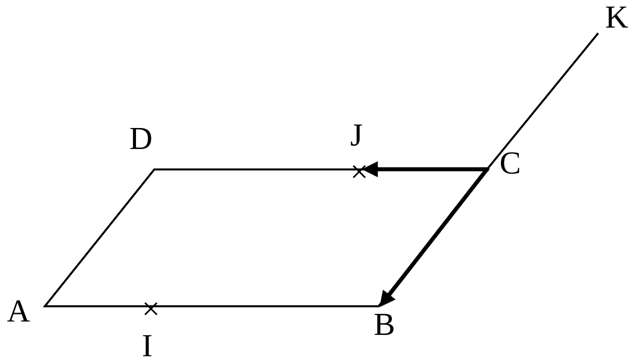
$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m-2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow -m+2+2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{m = 4}$

b. $m = 4$ on a donc $D(4\,;7)$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a aussi $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-(1+t) \\ t-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-t \\ t-3 \end{pmatrix}$

Donc $Det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 3-t & 2 \\ t-3 & -2 \end{vmatrix} = -2(3-t)-2(t-3) = -6+2t-2t+6 = \mathbf{0}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont toujours colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles quelque soit le nombre t.

Corrigé Exercice 5



a) $\Rightarrow$

b) On a $\boldsymbol{J(1\ ;\ 0)}$ et $\boldsymbol{K(0\,;-1)}$

On veut exprimer $\overrightarrow{CI}$ en fonction de $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CB}$:

$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Comme $ABCD$ est un parallélogramme :

$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\times 3\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{CB}$

On a $\boldsymbol{I\ (2\ ;\ 1)}$

c) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JK}$ **Non seulement les points I, J et K sont alignés, mais en plus, J est le milieu de $[IK]$**

Corrections Savoir Vps. 6

Corrigé Exercice 6

1) a. $\vec{u}.\vec{v} = 3\times 2 + (-1)\times 4 = 6-4 = \mathbf{2}$

b. On a $\vec{a}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\vec{a}.\vec{b} = -8-3 = \mathbf{-11}$

c. $\vec{u}^2 = 3^2 + (-1)^2 = 9+1 = \mathbf{10}$

d. $\|\vec{b}\| = \sqrt{4+16} = \sqrt{\mathbf{20}}$

2) a. On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = 42-28 = \mathbf{14}$

b. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 2-55 = \mathbf{-53}$

c. On a $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CB}^2 = (-5)^2 + (-9)^2 = 25+81 = \mathbf{106}$

d. On a $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 1 \\ 11 \end{pmatrix}$ donc $DC = \sqrt{1+121} = \sqrt{\mathbf{122}}$

1) a. $3\vec{u}.5\vec{v} = 15\vec{u}.\vec{v} = 15\times(-4-6) = \mathbf{-150}$

b. $\vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w} = -20+6+5-4 = \mathbf{-13}$

c. $2\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -8-1 \\ 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} + 3\vec{w} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}$

donc $(2\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+3\vec{w}) = -99+72 = \mathbf{-27}$

2) a. On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MT}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MT} = 14-20 = \mathbf{-6}$

b. On a $\overrightarrow{TH}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\|\overrightarrow{TH}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{\mathbf{2}}$

c. On a $\overrightarrow{TA}\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{TA}^2 = 25+81 = \mathbf{106}$

Corrigé Exercice 7

1) a. $\vec{u}.\vec{v} = -5 + 6 = 1 \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **ne sont pas orthogonaux.**

b. $\vec{u}.\vec{w} = -6 + 6 = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **sont orthogonaux.**

a. On a $\vec{b}\begin{pmatrix}-3\\12\end{pmatrix}$ donc $\vec{a}.\vec{b} = -24 + 24 = 0$

Les vecteurs $\vec{\boldsymbol{a}}$ **et** $\vec{\boldsymbol{b}}$ **sont orthogonaux**

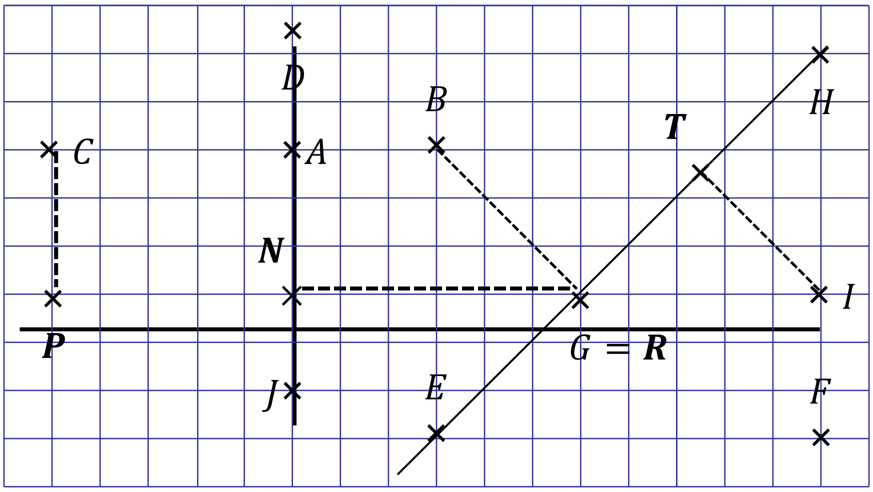
b. On a $\overrightarrow{PS}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ $\vec{a}.\overrightarrow{PS} = 8 - 10 = -2 \neq 0$

Les vecteurs $\vec{a}$ et $\overrightarrow{PS}$ **ne sont pas orthogonaux.**

2) a. On a $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-6\\12\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}10\\5\end{pmatrix}$donc $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{GH} = -60 + 60 = 0 \Rightarrow$ $\overrightarrow{\boldsymbol{EF}}$ **et** $\overrightarrow{\boldsymbol{GH}}$ **sont orthogonaux**

b. On a $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-1\\-13\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HE}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$donc $\overrightarrow{FG}.\overrightarrow{HE} = 3 + 52 = 55 \neq 0 \Rightarrow$ $\overrightarrow{\boldsymbol{FG}}$ **et** $\overrightarrow{\boldsymbol{HE}}$ **ne sont pas orthogonaux**

Corrigé Exercice 8



a. $M = A$

b. N = projeté de G sur (AJ) voir figure

c. P = projeté de C sur (GI) voir figure

d. $Q = E$

e. $R = G$ voir figure

f. $S = F$ car $F \in (IH)$

g. T = projeté de I sur (GH) voir figure

Corrigé Exercice 9

1) a. Soit d la longueur de la diagonale du carré de côté 1, on a : $d^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow d = \sqrt{2}$

b. Alignés de sens opposés : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3 \times 5 = \mathbf{-15}$

Alignés et de même sens : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 5 \times 8 = \mathbf{40}$

Le projeté sur (AB) de D est A, donc : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = 3^2 = \mathbf{9}$

Les vecteurs sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE} = \mathbf{0}$

(ou le projeté sur (BE) de A est B, donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BB}.\overrightarrow{BE} = \vec{0}.\overrightarrow{BE} = \mathbf{0}$)

$\overrightarrow{HG}.\overrightarrow{BG} = \mathbf{0}$ $\quad$ $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{HI} = 6 \times 5 = \mathbf{30}$

$\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{HI} = \mathbf{0}$ $\quad$ $\overrightarrow{JE}.\overrightarrow{FJ} = -3 \times 8 = \mathbf{-24}$ $\quad$ $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{JE} = \mathbf{0}$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{EF} = -5 \times 8 = \mathbf{-40}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IF} = \mathbf{0}$ $\quad$ $\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{GH} = -3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = -15 \times 2 = \mathbf{-30}$

2) a. • C • H • I • C • H

b. $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 169^2 - 156^2 = 4225 \Rightarrow BC = \sqrt{4225} = \mathbf{65}$

$CH^2 = BC^2 - BH^2 = 3600 \Rightarrow CH = \mathbf{60}$ et simplement $AH = AB - BH = 144$

c. • $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BC} = \mathbf{0}$ • $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AB} = -BH \times AB = \mathbf{-4225}$ • $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$;

• I est le milieu de $[AC]$ donc $AI = IC = \frac{156}{2} = 78$ donc $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AI} = IC \times AI = 78^2 = 6\,084$

• $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HB} = AH \times HB = 144 \times 25 = \mathbf{3\,600}$ • $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CH} = \mathbf{0}$

•Le projeté de B sur (CH) est H donc $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CH}^2 = 60^2 = 3600$

• $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AB} = -25 \times 169 = -4225$ (ou $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CB} = -65^2 = -4225$ aussi)

Corrigé Exercice 10

1) a. $\vec{u}.\vec{v} = \mathbf{-2 + 3k}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow -2 + 3k = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{k} = \frac{2}{3}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux pour $k = \frac{3}{2}$

b. $\vec{u}\binom{k}{2}$ et $\vec{v}\binom{k}{-2}$ $\vec{u}.\vec{v} = \boldsymbol{k^2 - 4}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 4$
$\Leftrightarrow k = 2$ ou $k = -2 \Rightarrow$ **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux pour $k \in \{-2; 2\}$**

c. $\vec{u}\binom{2k}{-1}$ et $\vec{v}\binom{-k}{3}$ $\vec{u}.\vec{v} = \boldsymbol{-2k^2 - 3}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow -2k^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow$
$\boldsymbol{k^2} = -\frac{3}{2}$ ce qui est impossible, car un carré est toujours positif…
donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne peuvent jamais être orthogonaux p

2) $\vec{u}.\vec{v} = ab - ab = \mathbf{0}$ $\Rightarrow$ **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont toujours orthogonaux**

Corrigé Exercice 11

1) a. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 3^2 + 2 \times 5 + 2^2 = \mathbf{23}$
b. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 9 - 10 + 4 = \mathbf{3}$

c. $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) == \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 9 - 4 = \mathbf{5}$

2) a. $(3\vec{u} - 2\vec{v})^2 = 9\|\vec{u}\|^2 - 12\vec{u}.\vec{v} + 4\|\vec{v}\|^2 = 9 + 36 + 4 \times 2 = \mathbf{53}$
b. $(4\vec{u} - 3\vec{v}).(\vec{u} + 2\vec{v}) = 4\|\vec{u}\|^2 + 8\vec{u}.\vec{v} - 3\vec{v}.\vec{u} - 6\|\vec{v}\|^2 = 4 + 5 \times (-3) - 6 \times 2 = \mathbf{-23}$

3) $(2\vec{u} + \vec{v}).(-\vec{u} + 2\vec{v}) = -2\vec{u}^2 + 4\vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + 2\vec{v}^2 = -4 - 8 + 2 + 10 = 0$
Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux.

Corrections Savoir Vps. 7

Corrigé Exercice 12

1) a. On a $\overrightarrow{CA}\binom{-1}{2}$ et $\overrightarrow{CB}\binom{4}{2}$ on calcule $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -1 \times 4 + 2 \times 2 = -4 + 4 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux, donc **le triangle ABC a un angle droit en C : il y est bien rectangle**

b. On a $\overrightarrow{FE}\binom{3}{2}$ et $\overrightarrow{DE}\binom{3}{-5}$ on calcule $\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{DE} = 3 \times 3 + 2 \times (-5) = 9 - 10 = -1$
Les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas orthogonaux, donc **les droites (FE) et (DE) ne sont pas perpendiculaires**

2) a. $\overrightarrow{FM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FE} - \frac{3}{2}\overrightarrow{GF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FG} = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

b. Dans le triangle EFG, la hauteur issue de F doit être perpendiculaire à (EG)
On calcule $\overrightarrow{FM}.\overrightarrow{EG} = \frac{3}{2}\times(-1) + \frac{3}{2}\times 1 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$ Les vecteurs $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont orthogonaux, donc on a $(FM) \perp (EG)$ et, dans le triangle EFG, **la droite (FM) est bien la hauteur issue de F.**

c. $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FM} = -\overrightarrow{FG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

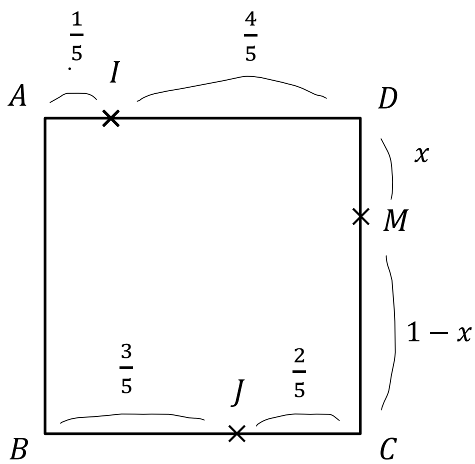
On calcule $\overrightarrow{GK}.\overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0$ Les vecteurs $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{GM}$ ne sont pas orthogonaux, donc **le triangle KGM n'est pas rectangle en G**

d. On a $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{FE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$
Et comme $\overrightarrow{FE}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, on calcule $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{FE} = 0\times 1 + 2\times 0 = 0$ Les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont orthogonaux, donc **les droites (EF) et (PM) sont perpendiculaires**

1) $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$ On calcule $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MS} = -18 + 18 = 0$
$\overrightarrow{MP}$et $\overrightarrow{MS}$ sont orthogonaux, donc le triangle **MPS est bien rectangle en M**

2) dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ on a $\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}$ Et $\overrightarrow{UW} = \overrightarrow{UB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AW} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
$= -3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{ST}.\overrightarrow{UW} = -4\times\frac{3}{2} + 3\times 2 = -6 + 6 = 0$ Les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{UW}$ sont orthogonaux, donc $(ST) \perp (UW)$

Corrigé Exercice 13

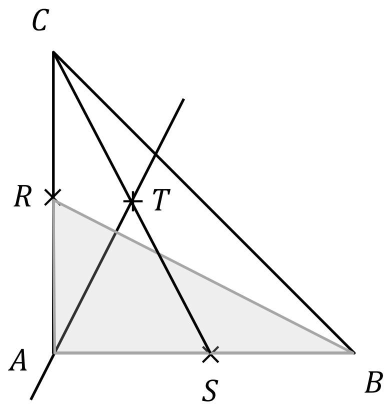


1) a) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$
$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}\left(1; \frac{2}{5}\right)$
$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} + x\overrightarrow{DC} = (-1 + x)\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$
$= (-1 + x)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
$\Rightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x - 1\\1\end{pmatrix}$

b) On a $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{BM} = 1(x - 1) + \frac{2}{5}\times 1 = x - 1 + \frac{2}{5} = \boldsymbol{x - \frac{3}{5}}$

Les droites **(IJ) et (BM) sont perpendiculaires quand** $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{3}{5} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = \frac{3}{5}}$

2) Il faut montrer que $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{RB}$sont orthogonaux, donc que $\overrightarrow{AT}.\overrightarrow{RB} = 0$



Une des façons, c'est de donner les coordonnées dans la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$
$A(0\ ;\ 0)\ ;\ R\left(0\ ;\frac{1}{2}\right)\ ;\ B(1\ ;\ 0)$ On a alors $\overrightarrow{RB}\left(1\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$

Et $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ Donc $\overrightarrow{AT}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$

Alors $\overrightarrow{AT}.\overrightarrow{RB} = 1 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0$
On a bien (AT) et (RB) qui sont perpendiculaires, $(\boldsymbol{AT})$ **est la hauteur issue de A du triangle ARB.**

3) a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$! c'est un carré, on a $(AB) \perp (AD)$!

b. $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$ CQFD
et $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}}$ CQFD

c. $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{DL} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{16}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2$
Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ donc $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{DL} = \frac{1}{4}AB^2 - \frac{1}{4}AD^2$ mais comme $ABCD$ est un carré, $AB^2 = AD^2$
Donc $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{DL} = 0$ les vecteurs sont orthogonaux, et les droites (KC) et (DL) sont perpendiculaires