Exercice 5 : Exprimer les propriétés au rang $p+1$

Qu'elles soient vraies ou fausse, écrire les propriétés suivantes au rang $p+1$

1) P_n : « $S_n = \frac{3n(n+2)}{n-1}$ »

2) P_n : « $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$ »

3) P_n : « $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ »

Un peu plus…

4) P_n : « $T_n = (2n-1)(n+3)$ »

5) P_n : « $v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = 3n - 2$ »

Exercice 6 : Récurrence sur des sommes

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$,
$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

2) Soit n un entier naturel non nul.
On note $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ et $C_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$

a. Écrire S_n et C_n à l'aide du symbole somme Σ

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

c. Calculer C_n pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $C_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) On sait que $v_n = 2n + 2$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$

Un peu plus…

Soit x un réel différent de 1.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Exercice 7 : Autres récurrences

Pour n entier, $n \geq 4$, on note d_n le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés.

(« Convexe » signifie que tout segment joignant deux points à l'intérieur du polygone est intégralement à l'intérieur du polygone)

a. Déterminer par un dessin d_4, d_5, d_6 et d_7

b. Pour exemple, tracer un pentagone ABCDE et ajouter un point F à l'extérieur du pentagone. Quelles sont les diagonales de l'hexagone ABCDEF qui ne sont pas des diagonales de ABCDE ?

c. Établir une relation entre d_{n+1} et d_n

d. Montrer que, pour $n \geq 4$, $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$

Exercice 8 : Réfléchir

● Pas trop vite

Démontrer, pour tout entier $n \geq 1$, que la différence des carrés des entiers suivant et précédent, c'est-à-dire $(n+1)^2 - (n-1)^2$, est un multiple de n.

● QCM – une seule réponse exacte

La propriété Q_n : « 9 divise $10^n - 1$ » :

a. est héréditaire **b.** n'est pas héréditaire **c.** est fausse à partir d'un certain rang n

● Vrai/Faux – Justifier la réponse

1. Si une propriété est vraie pour $n = 4$ et héréditaire à partir de $n = 2$, alors elle est vraie pour tout entier $n \geq 2$

2. Si une propriété est vraie pour $n = 2$ et héréditaire à partir de $n = 4$, alors elle est vraie pour tout entier $n \geq 4$

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = {u_n}^2$. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n = 1$