Savoir Pe. 1

Entraînement 1

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4(1-x)e^{1-2x}$.

a. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = (2x-1)e^{1-2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la fonction Φ, primitive de f telle que Φ prenne la valeur 1 en $x = 0$.

2) Soit a et b les fonctions définies sur [1 ;+∞[par $a(t) = (1+t)\ln t$ et $b(t) = 1 + \frac{1}{t} + \ln t$.

a. Montrer que a est une primitive de b.

b. En déduire la forme générale de toutes les primitives de b.

Entraînement 2

1) Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = 1 + \ln(2x)$.

a. Vérifier que la fonction H définie par $H(x) = (x-1)\ln(2x) + \ln x$ est une primitive de h sur $]0; +\infty[$.

b. Déterminer la fonction θ, primitive de h sur $]0; +\infty[$ s'annulant en $x = 2$.

2) Soit α et β les fonctions définies sur [1 ;+∞[par : $\alpha(t) = \dfrac{e^t}{1+e^{-t}}$ $\beta(t) = \dfrac{2+e^t}{(1+e^{-t})^2}$

a. Montrer que α est une primitive de β.

b. En déduire la forme générale de toutes les primitives de β.

Correction Savoir Pe. 1

Corrigé Entraînement 1

1) **a.** $F'(x) = 2e^{1-2x} + (2x-1)(-2e^{1-2x}) = (2-4x+2)e^{1-2x} = (-4x+4)e^{1-2x} = 4(1-x)e^{1-2x}$

On a $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$, donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$

b. On a $\Phi(x) = F(x) + k = (2x-1)e^{1-2x} + k$ où $k \in \mathbb{R}$ et on doit avoir $\Phi(0) = 1$

donc $(0-1)e^{1-0} + k = 1 \Rightarrow -e + k = 1 \Rightarrow \boldsymbol{k = 1 + e}$ Donc $\boldsymbol{\Phi(x) = (2x-1)e^{1-2x} + 1 + e}$

2) **a.** On a $a'(t) = 1 \ln t + (1+t)\frac{1}{t} = \ln t + \frac{1}{t} + 1$ donc $a' = b$.

La fonction a est donc bien une primitive de b

b. Les primitives de b donc donc les fonctions de la forme :

$$F_k(t) = (1+t)\ln t + k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Corrigé Entraînement 2

1) **a.** $H'(x) = \ln(2x) + (x-1) \times \frac{2}{2x} + \frac{1}{x} = \ln(2x) + \frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} = \ln(2x) + \frac{x}{x} = \ln(2x) + 1$

On a $\boldsymbol{H'(x) = h(x)}$, donc H est une primitive de h sur $]0; +\infty[$

b. On a : $\theta(x) = H(x) + k = (x-1)\ln(2x) + \ln x + k$ où $k \in \mathbb{R}$ et on doit avoir $\theta(2) = 0$

$(2-1)\ln(2 \times 2) + \ln 2 + k = 0 \Leftrightarrow \ln 4 + \ln 2 + k = 0 \Leftrightarrow \ln 8 + k = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{k = -\ln 8}$

Donc $\boldsymbol{\theta(x) = (x-1)\ln(2x) + \ln x - \ln 8}$

2) **a.** On calcule : $\alpha'(t) = \dfrac{e^t(1+e^{-t}) - e^t(-e^{-t})}{(1+e^{-t})^2} = \dfrac{e^t + 1 + 1}{(1+e^{-t})^2} = \dfrac{2+e^t}{(1+e^{-t})^2}$

Donc $\alpha' = \beta$: α est bien une primitive de β.

b. Les primitives de β donc donc les fonctions de la forme : $F_k(t) = \frac{e^t}{1+e^{-t}} + k, \qquad k \in \mathbb{R}$