CORRECTION du SUJET de BAC

SESSION décembre 2021

EXERCICE 1 (5 points)

1. a. $u_1 = 0{,}95 \times 600 + 80 = 650$ et $u_2 = 0{,}95 \times 650 + 80 \simeq 698$.
En 2016, l'association compte donc 650 abonnés, et elle en compte 698 en 2017.

b. On a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 1600 = 0{,}95\, u_n + 80 - 1600 = 0{,}95\, u_n - 1520$
et $0{,}95\, v_n = 0{,}95(u_n - 1\,600) = 0{,}95\, u_n - 1520$
On a ainsi : $v_{n+1} = 0{,}95\, v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,95 .
avec $v_0 = u_0 - 1600 = -1000$.

c. On a donc $v_n = -1000 \times 0{,}95^n$ et ainsi : $u_n = v_n + 1600 \Rightarrow u_n = 1600 - 1000 \times 0{,}95^n$ CQFD.

2. On constate que : $u_9 < 1000 < u_{10}$. L'association devra donc servir plus de 1000 repas à partir de l'année 2025 et donc envisager des travaux d'agrandissement.

3. $0{,}95 \in]-1; 1[$ donc $0{,}95^n \to 0$. On a donc :

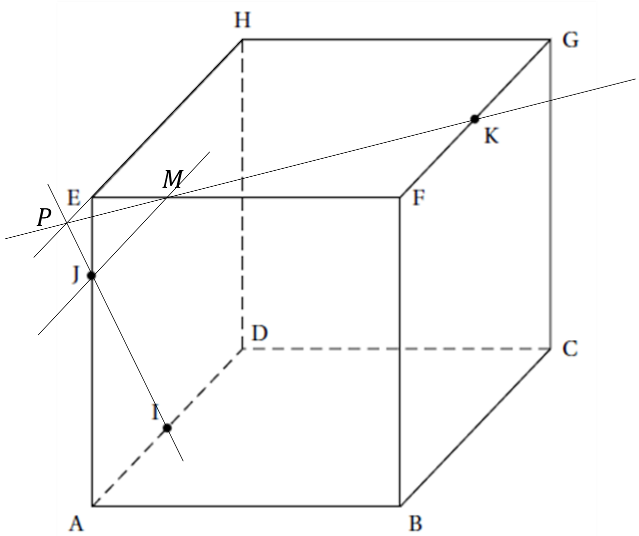
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1600$$

L'association doit prévoir de tendre vers 1600 abonnés et donc de s'agrandir en conséquence.

EXERCICE 2 (4 points)

Question 1. REPONSE c. $g'(x) = \ln(x-1) + \dfrac{x-1}{x-1} = 1 + \ln(x-1)$ $g(e+1) = e \quad g'(e+1) = 2$ $y = 2(x-e-1) + e \Leftrightarrow y = 2x - e - 2$	**Question 2. REPONSE b.** $u_n = \dfrac{n - 2n^3}{n-1} = n^2 \times \dfrac{\frac{1}{n^2} - 2}{1 - \frac{1}{n}}$
Question 3. REPONSE d. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-4\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} = u\overrightarrow{AC} + v\overrightarrow{AD} \Rightarrow \begin{cases} -3 = -2u \\ -3 = -4v \\ 3 = -2u - 2v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{3}{2} \\ v = \frac{3}{4} \\ 3 = -3 - \frac{3}{2} \end{cases}$ Impossible	**Question 4. REPONSE a.** $x^2 - 2x - 3 < 0$ $\Rightarrow \ \Delta = 4 + 12 = 16$ $\Rightarrow \ x_1 = -1 \ ; \ x_2 = 3$

EXERCICE 3 (5 points)



PARTIE A

1. a. I et J étant communs à ces deux plans, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EAD) est donc la droite (IJ).

b. Les droites (IJ) et (EH) sont sécantes puisqu'elles sont toutes les deux dans le plan (EAD) et qu'elles ne sont pas parallèles.

2. Voir figure : P est à l'intersection de (IJ) et de (EH).

3. Voir figure. C'est la droite (JM).

PARTIE B

1. $I\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $J\left(0;0;\frac{3}{4}\right)$ et $K\left(1;\frac{1}{2};1\right)$, et $\overrightarrow{JK}\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$.

2. On peut donner par exemple :

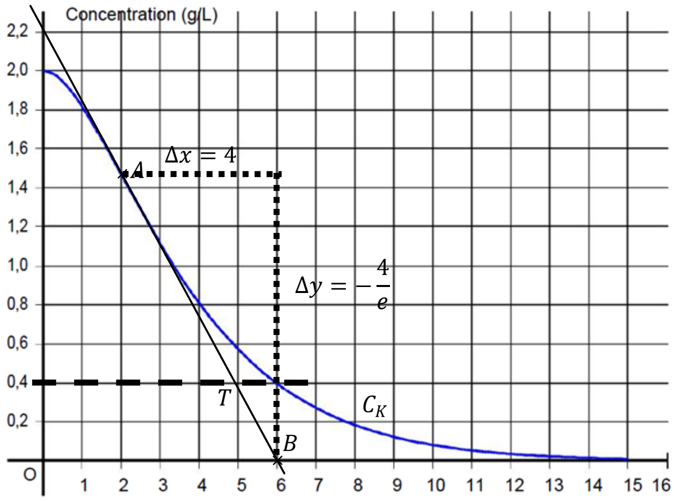
$$(JK):\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. $IK = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$ et $IJ = \sqrt{0+\frac{1}{4}+\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{13}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

4. On a $IJ^2 = \frac{13}{16}$; $JK^2 = \frac{21}{16}$ et $IK^2 = 2$. On a donc $IJ^2 + JK^2 = \frac{13}{16}+\frac{21}{16} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8} \neq IK^2$.
Le triangle IJK n'est donc pas rectangle en J. (Mais presque puisque $IK^2 = \frac{16}{8}$... ☺)

EXERCICE 4 (6 points)

PARTIE A – Etude graphique



1. La concentration à l'instant initial est de 2 g/L.
2. La concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre entre 0 et 6h après l'injection : sur l'intervalle [0 ;6].
3. On a : $K'(2) = \frac{0-\frac{4}{e}}{4} = -\frac{1}{e}$

PARTIE B – Etude théorique

1. $K'(x) = 1e^{-\frac{x}{2}} + (x+2)\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$

$= \left(1-\frac{1}{2}(x+2)\right)e^{-\frac{x}{2}} \quad = \left(1-\frac{1}{2}x-1\right)e^{-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}x\,e^{-\frac{x}{2}}$ CQFD

On obtient donc le tableau ci-contre.

x	0		15
$-\frac{1}{2}x$		$-$	
$e^{-\frac{x}{2}}$		$+$	
$K'(x)$		$-$	
$K(x)$	2	↘	$17e^{-\frac{15}{2}}$

2. Sur $[0;15]$, la fonction K est continue, strictement décroissante avec $K(0) > 0{,}1 > K(15)$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), l'équation $K(x) = 0{,}1$ admet donc une unique solution α sur l'intervalle $[0;15]$.
3. On constate que $K(9{,}4) > 0{,}1 > K(9{,}5)$. Donc $\alpha \simeq 9{,}4$ par défaut (ou $\alpha \simeq 9{,}5$ par excès).
(Pour un arrondi, on peut constater que : $K(9{,}48) > 0{,}1 > K(9{,}49)$ donc $\alpha \simeq 9{,}5$ (arrondi).
4. Le médicament est donc actif pendant 9 heures et demie.

PARTIE C – Généralisation - BONUS [Seulement si tout le reste a été tenté] (+1 point)

1. On a : $K_n(0) = n \times e^0 = n$ et $K_n(n) = 2ne^{-1} = \frac{2}{e}n = \lambda n$ CQFD
2. On calcule : $K_n'(x) = e^{-\frac{x}{n}} + (x+n)\left(-\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}\right) = \left(1-\frac{1}{n}(x+n)\right)e^{-\frac{x}{n}} = -\frac{1}{n}xe^{-\frac{x}{n}}$.
Comme dans la partie C, K_n' est donc négative sur $[0;n]$ et on obtient donc :

x	0		n
$K_n(x)$	n	↘	λn

3. On a $\lambda \simeq 0{,}74$ donc $\lambda < 0{,}9$. On a donc : $1 > 0{,}9 > \lambda$
=> (en multipliant par n) $n > 0{,}9n > \lambda n$
=> $K_n(0) > 0{,}9n > K_n(n)$
Donc d'après le TVI, comme dans la partie B, l'équation $K_n(x) = 0{,}9n$ admet une unique solution α_n sur l'intervalle $[0;n]$, donc il existe une seule valeur α_n dans $[0;n]$ telle que $C_n(\alpha_n) = 0{,}9n$.