Savoir Sr.1 - R^t par récurrence : formules explicites

Entraînement 1

On définit la suite (x_n) définie par $x_1 = 5$ et pour $n \geq 2$, $x_{n+1} = 2x_n - n - 1$

Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a $\boldsymbol{x_n = 2^n + n + 2}$

Entraînement 2

On définit la suite (w_n) définie par $w_0 = 8$ et $w_{n+1} = \frac{2}{5}w_n + 3$

Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $\boldsymbol{w_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5}$

Entraînement 3

On définit la suite (a_n) par $a_1 = 0$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$

Montrer pour tout entier naturel $n \geq 1$ que : $\boldsymbol{a_n = n^2 - 1}$

Entraînement 4

On définit la suite (u_n) définie par $u_0 = 18$ et pour tout n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $\boldsymbol{u_n = 6 + \frac{12}{2^n}}$

Entraînement 5

On définit la suite (y_n) définie par $y_3 = 12$ et pour tout entier $n \geq 3$, $y_{n+1} = y_n + 2n + 2$

Montrer que, pour tout entier naturel $n \leq 3$, on a $\boldsymbol{y_n = n(n+1)}$

Corrections Savoir Sr.1

Corrigé Entraînement 1

1) Initialisation : Pour $n = 1$ on a $x_n = x_1 = 5$ et $2^n + 1 + 2 = 5 \Rightarrow$ **La propriété est vraie au rang 1**

Hérédité : **Si l'égalité est vraie pour $\boldsymbol{n = p} \geq 1$** alors on a : $x_p = 2^p + p + 2$

Alors pour $\boldsymbol{n = p + 1}$, on a : $x_n = x_{p+1} = 2x_p - p - 1 = 2(2^p + p + 2) - p - 1 = 2^{p+1} + p + 3$
Et d'autre part : $2^n + n + 2 = 2^{p+1} + (p + 1) + 2 = 2^{p+1} + p + 3 = x^n$
Alors la propriété est vraie au rang $\boldsymbol{n = p + 1}$

Conclusion : Donc pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$\boldsymbol{x_n = 2^n + n + 2}$$

Corrigé Entraînement 2

Initialisation : Pour $n = 0$ on a $w_n = w_0 = 8$ et $3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5 = 3 \times 1 + 5 = 8$
La propriété est vraie au rang 0

Hérédité : **Si l'égalité est vraie pour $\boldsymbol{n = p}$** alors $w_p = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^p + 5$

Alors pour $\boldsymbol{n = p + 1}$, on a : $w_n = w_{p+1} = \frac{2}{5}w_p + 3 = \frac{2}{5}\left(3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^p + 5\right) + 3 = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{p+1} + 5$
Et : $3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5 = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{p+1} + 5 = w_n$ **Alors la propriété est vraie au rang $\boldsymbol{n = p + 1}$**

Conclusion : Donc pour tout entier naturel n, on a :
$$\boldsymbol{w_n = 3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 5}$$

Corrigé Entraînement 3

Initialisation : pour $n = 1$, on a $a_1 = 0$ et $n^2 - 1 = 0 = a_1$ **La propriété est vraie au rang 1**

Hérédité : **Si l'égalité est vraie pour $\boldsymbol{n = p}$** alors on a $\boldsymbol{a_p = p^2 - 1}$

Alors pour $\boldsymbol{n = p + 1}$, on a : $a_n = a_{p+1} = a_p + 2p + 1 = p^2 - 1 + 2p + 1 = p^2 + 2p$
Et d'autre part : $n^2 - 1 = (p + 1)^2 - 1 = p^2 + 2p + 1 - 1 = p^2 + 2p = a_n$
Alors la propriété est vraie au rang $\boldsymbol{n = p + 1}$

Conclusion : Donc pour tout entier naturel n, on a :
$$\boldsymbol{a_n = n^2 - 1}$$

Corrigé Entraînement 4

Initialisation : pour $n = 0,\ u_n = u_0 = 18$ et $6 + \frac{12}{2^n} = 6 + 12 = 18$ **La propriété est vraie au rang 0**

Hérédité : **Si la propriété est vraie pour $\boldsymbol{n = p}$** alors on a : $\boldsymbol{u_p = 6 + \frac{12}{2^p}}$

Alors pour $\boldsymbol{n = p + 1}$, on a : $u_n = u_{p+1} = \frac{1}{2}u_p + 3 = \frac{1}{2}\left(6 + \frac{12}{2^p}\right) + 3 = \boldsymbol{6 + \frac{12}{2^{p+1}}}$
Et d'autre part : $\boldsymbol{6 + \frac{12}{2^n} = 6 + \frac{12}{2^{p+1}} = u_n}$ **La propriété est vraie au rang $\boldsymbol{n = p + 1}$**

Conclusion : Donc pour tout entier naturel n, on a :

$$\boldsymbol{u_n = 6 + \frac{12}{2^n}}$$

Corrigé Entraînement 5

Initialisation : pour $n = 3$ on a : $y_n = y_3 = 12$ et $n \times (n + 1) = 3 \times 4 = 12$ **La propriété est vraie au rang 3**

Hérédité : **Si la propriété est vraie pour $\boldsymbol{n = p}$** alors on a : $\boldsymbol{y_p = p(p + 1)}$

Alors pour $\boldsymbol{n = p + 1}$, on a : $y_n = y_{p+1} = y_p + 2p + 2 = p(p + 1) + 2p + 2 == p^2 + 3p + 2$
Et d'autre part : $n(n + 1) = (p + 1)(p + 2) = p^2 + 3p + 2 = y_n$
Alors **la propriété est vraie au rang $\boldsymbol{n = p + 1}$**

Conclusion : Donc pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a :

$$\boldsymbol{y_n = n(n + 1)}$$