

Savoir Ed. 8 : Résolution de $y' = ay + f$ - Avec démonstration

Exercice 17 : Résolution guidée de $y' = ay + f$

1) On considère l'équation différentielle : $(E) : y' = 2y + 8$

- Soit f la fonction constante définie par $f(x) = -4$.
Montrer que f est solution de l'équation (E) .
- On considère maintenant l'équation différentielle $(E_0) : y' = 2y$.
Montrer que si g est solution de (E_0) alors la fonction $h = f + g$ est solution de (E) .
- En déduire les solutions de (E) .

2) On considère l'équation différentielle : $(E) : y' = x - y$

- Soit s la fonction définie par $s(x) = x - 1$.
Montrer que s est solution de l'équation (E) .
- On considère maintenant l'équation différentielle $(E_0) : y' = -y$.
On définit une fonction h par : $h(x) = f(x) - s(x)$.
Montrer que si h est solution de (E_0) alors f est solution de (E) .
- En déduire les solutions de (E) ,
- Montrer que l'unique solution D de (E) vérifiant $D(1) = 2$ est donnée par : $D(x) = 2e^{1-x} + x - 1$

Exercice 18 : Type BAC – Métropole septembre 2025

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + 0,4y = e^{-0,4t}$$

où y est une fonction de variable réelle t .

On cherche l'ensemble des solutions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de cette équation.

1) Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = te^{-0,4t}$.

Vérifier que u est solution de (E) .

2) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = f(t) - u(t)$.

Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0,4y = 0$.

- Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) .

On admettra que la réciproque est vraie.

- Résoudre l'équation différentielle (H) .
- En déduire les solutions de (E) .
- Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

Exercice 19 : Chauffage d'un liquide

On chauffe dans une grande cuve un liquide et on appelle $g(t)$ sa température en degrés Celsius à l'instant t exprimé en secondes.

La température à l'instant initial $t = 0$ est de 22°C .

Des ingénieurs ont modélisé l'évolution de la température du liquide en montrant que g était solution de l'équation différentielle suivante.

$$(E) : y' - 0,002y = 0,02$$

1) Soit f la fonction constante définie par $f(x) = \alpha$, où α est un nombre réel.

Déterminer la valeur de α pour que f soit solution de (E) .

2) Sachant que g est une solution de (E) , exprimer $g'(t)$ en fonction de $g(t)$.

3) Soit h la fonction définie par $h(t) = g(t) + 10$.

Montrer que h est solution de l'équation différentielle :

$$(E_0) : y' - 0,002y = 0$$

4) Résoudre l'équation (E_0) .

5) En déduire l'expression de $g(t)$ en fonction de t .

6) Quelle sera la température du liquide au bout d'une minute ?

Arrondir au 10^{e} de degré.

7) Au bout de combien de temps la température va-t-elle dépasser 86°C ?

Donner la réponse en minutes - secondes.