

Corrections Vrai-faux

Corrigé ① On remarque que la fonction $g(x) = -8$ est une solution particulière de l'équation (E), en effet : $y' = g'(x) = 0$ et $\frac{1}{2}y + 4 = \frac{1}{2} \times (-8) + 4 = -4 + 4 = 0$

Les solutions de l'équation $y' = \frac{1}{2}y$ sont les fonctions $y = ke^{\frac{1}{2}x}$ avec $k \in \mathbb{R}$

Les solutions de (E) sont donc bien les fonctions $f(x) = ke^{\frac{1}{2}x} - 8$ avec $k \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ **Affirmation 1 : VRAIE**

Corrigé ② On a $f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x}$

Alors $y' + 2y = f'(x) + 2f(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} + 2xe^{-2x} = e^{-2x}$

L'égalité est vérifiée, la fonction f est bien solution de l'équation différentielle $\Rightarrow$ **Affirmation 2 : VRAIE**

Corrigé ③

On a $y' = f'(x) = e^x + 2e^{2x}$ et $2y - e^x = 2(e^x + e^{2x}) - e^x = 2e^x + 2e^{2x} - e^x = e^x + 2e^{2x}$

L'égalité est bien vérifiée, la fonction f est bien solution de l'équation (E) $\Rightarrow$ **Affirmation 3 : VRAIE**

Corrigé ④ On a $F'(x) = 2 \ln(x) + (2x + 1) \times \frac{1}{x} = 2 \ln x + 2 + \frac{1}{x}$ On a $F'(x) \neq f(x)$

Donc F n'est pas une primitive de $f \Rightarrow$ **Affirmation 4 : FAUSSE**

Corrigé ⑤ On a $g'(t) = 45 \times 0,06e^{0,06t} = 2,7e^{0,06t}$

donc $y' + 0,06y = 2,7e^{0,06t} + 0,06(45e^{0,06t} + 20) = 2,7e^{0,06t} + 2,7e^{0,06t} + 1,2 = 5,4e^{0,06t} + 1,2$

La fonction g n'est pas solution de l'équation différentielle $\Rightarrow$ **Affirmation 5 : FAUSSE**

Corrigé ⑥ $y' - y = 3e^{0,4x} \Leftrightarrow y' = y + 3e^{0,4x}$

On sait que y est une fonction positive, et comme $e^{0,4x} > 0$ on en déduit que $y' > 0$

Si on dérive, on obtient $y'' = y' + 1,2e^{0,4x}$ et de même, comme $y' > 0$, on a $y'' > 0$

Donc les fonctions f solution de (E_2) seront telles que $f''(x) > 0$ et donc bien convexes

$\Rightarrow$ **Affirmation 6 : VRAIE**

Corrigé ⑦ On a $f'(x) = -2 \sin x - \cos x$

Donc $-2y' + 3y = -2(-2 \sin x - \cos x) + 3(2 \cos x - \sin x) = 4 \sin x + 2 \cos x + 6 \cos x - 3 \sin x$
 $= \sin x + 8 \cos x$

L'égalité est vérifiée, la fonction f est solution de (E) $\Rightarrow$ **Affirmation 7 : VRAIE**

Corrigé ⑧ On a $f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$

On a donc $xy' - y = x(\ln x + 1) - (x \ln x) = x \ln x + x - x \ln x = x$

L'égalité est vérifiée, la fonction f est solution de l'équation différentielle $\Rightarrow$ **Affirmation 8 : VRAIE**

Corrigé ⑨ On a $k(x) > 0$ car somme de deux fonctions strictement positives.

Pour une fonction K primitive de k , on aura toujours $K'(x) = k(x)$ donc $K'(x) > 0$.

Donc la dérivée de cette primitive sera positive, la primitive sera obligatoirement croissante.

$\Rightarrow$ **Affirmation 9 : FAUSSE**

Corrections Sujet 1

Partie A

1.

x	-3	-2	1	5	
$\mathcal{C}_2$	-	0	+	0	+

x	-3	-2	1	5
$\mathcal{C}_1$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

Le signe de la fonction correspondant à la courbe $\mathcal{C}_2$ donne le sens de variation de la fonction correspondant à la courbe $\mathcal{C}_1$. Donc la courbe $\mathcal{C}_2$ correspond à la dérivée g' et la courbe $\mathcal{C}_1$ correspond à la fonction g

2. Sur la courbe $\mathcal{C}_2$ on lit $g'(0) = 2$ et sur la courbe $\mathcal{C}_1$ on lit $g(0) = 1$

On a donc pour équation de tangente : $y = g'(0) \times (x - 0) + g(0) \Leftrightarrow y = 2x + 1$ CQFD

Partie B

$$(E) \quad y + y' = (2x + 3)e^{-x}$$

1. On a $f'_0(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x)(-e^{-x}) = (2x + 3 - x^2 - 3x)e^{-x} = (3 - x^2 - x)e^{-x}$

Donc $y + y' = f_0(x) + f'_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x} + (3 - x^2 - x)e^{-x} = (x^2 + 3x + 3 - x^2 - x)e^{-x} = (2x + 3)e^{-x}$

La fonction f_0 est bien solution de l'équation différentielle (E)

2. $(E_0) : y + y' = 0 \Leftrightarrow y' = -y$

Les solutions de cette équation sont donc les fonctions $f_k(x) = ke^{-x}$, avec $k \in \mathbb{R}$

3. f_0 est une solution particulière de (E) donc les solutions de (E) sont de la forme $y = f_k(x) + f_0(x)$, c'est-à-dire les fonctions $y = ke^{-x} + (x^2 + 3x)e^{-x}$ ou $y = (x^2 + 3x + k)e^{-x}$ avec $k \in \mathbb{R}$

4. On a $g(x) = (x^2 + 3x + k)e^{-x}$ et on sait que $g(0) = 1$ donc $(0^2 + 3 \times 0 + k)e^0 = 1 \Leftrightarrow k = 1$
Donc $g(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$

5. On a $y = (x^2 + 3x + k)e^{-x}$ donc $y' = (2x + 3 - x^2 - 3x - k)e^{-x} = (-x^2 - x + 3 - k)e^{-x}$

Et $y'' = (-2x - 1 + x^2 + x - 3 + k)e^{-x} = (x^2 - x - 4 + k)e^{-x}$

Le signe de y'' dépend donc du signe du polynôme $x^2 - x - 4 + k$

Pour $x^2 - x - 4 + k$, on a $\Delta = 1 - 4(-4 + k) = 17 - 4k$

Pour $17 - 4k > 0$, c'est-à-dire pour $k < \frac{17}{4}$ il y aura exactement 2 racines et on aura :

x	$-\infty$	k_1	k_2	$+\infty$	
y''	+	0	-	0	-

La courbe aura bien alors deux points d'inflexions, en k_1 et k_2 .

Ce sont donc les fonctions $y = (x^2 + 3x + k)e^{-x}$ pour $k < \frac{17}{4}$

Partie C

2. a. $f'(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x + 2)(-e^{-x}) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$ CQFD

b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Pour $-x^2 - x + 1$, on a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5$

On a alors $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$	$x_1 \simeq -1,6$	$x_2 \simeq 0,6$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
				0

3. On a $f(0) = 2$ et la fonction f est croissante sur $[0; x_2]$, donc $f(x) \geq 0$ sur $[0; x_2]$
 Sur $[x_2; +\infty[$ la fonction f est monotone décroissante, mais $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc $f(x) \geq 0$ sur $[x_2; +\infty[$
 La fonction f est bien positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

4. On a $F'(x) = (-2x - 5)e^{-x} + (-x^2 - 5x - 7)(-e^{-x}) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = f(x)$
 Donc F est bien une primitive de la fonction f .

Correction Sujet 2

Partie A

1.

x	0	1,5	5
$f(x)$	-5,5	$\nearrow$ 2,5	$\searrow$ 0,3

2. La courbe $\mathcal{C}$ semble avoir un **point d'inflexion en A**, car elle y traverse sa tangente.

3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.
 Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente. Ce choix sera justifié.

On doit donc avoir pour la dérivée :

Et pour la dérivée seconde :

x	0	1,5	5
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$

x	0	2,5	5
$f(x)$	Concave	PI	Convexe
$f''(x)$	$-$	0	$+$

C'est la courbe $\mathcal{C}_2$ qui **correspond** au signe de f' et la courbe $\mathcal{C}_1$ qui **correspond** au signe de f''

4. Si F est une primitive de f , alors on aurait $F'(x) = f(x)$ et donc on devrait avoir pour les variations de F

x	0	0,5	5
$f(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	

Ce qui ne correspond pas à la courbe proposée.
Non, $\mathcal{C}_3$ ne peut pas être la représentation d'une primitive de la fonction f .

Partie B

1. a. $f'(x) = 4e^{-x+1} + (4x - 2)(-e^{-x+1}) = (4 - 4x + 2)e^{-x+1} = (-4x + 6)e^{-x+1}$ CQFD

b. Avec $f(0) = -2e$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4e^{-\frac{1}{2}} \simeq 2,4$

x	0	$\frac{3}{2}$	5
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-2e$	$\nearrow$ $4e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$ 0

c. On a $f''(x) = (-4)e^{-x+1} + (-4x + 6)(-e^{-x+1}) = (-4 + 4x - 6)e^{-x+1} = (4x - 10)e^{-x+1}$
Donc

x	0	$\frac{5}{2}$	5
$f''(x)$	-	0	+

f est concave sur $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$, et sa courbe a un point d'inflexion au point $A\left(\frac{5}{2}; 8e^{-\frac{3}{2}}\right)$

2. a. On a $F'(x) = ae^{-x+1} + (ax + b)(-e^{-x+1}) = (-ax + a - b)e^{-x+1}$

Si F est une primitive de la fonction f alors on a $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow -ax + a - b = 4x - 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 4 \\ a - b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = a + 2 = -2 \end{cases}$$

C'est donc $F(x) = (-4x - 2)e^{-x+1}$ qui est une primitive de f

Corrections Sujet 3

Partie A

1. La concentration de médicament dans le sang est maximale **une heure** après l'injection

2. $f(t) \geq 1 \Rightarrow S = [0, 25; 2, 5]$

La concentration dans le sang est supérieure à 1 g/L entre 15 minutes et 2h30 après l'injection.

3. La fonction semble **concave sur $[0; 2, 5]$ et convexe sur $[2, 5; 8]$**

Partie B

1. $(E') : y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$

Les solutions de cette équation sont donc les fonctions $f_k(t) = ke^{-t}$, avec $k \in \mathbb{R}$

2. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $u(t) = ate^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction u soit solution de l'équation (E).

$$\text{On a } u'(t) = ae^{-t} + at(-e^{-t}) = (a - at)e^{-t}$$

$$\text{Donc } y' + y = u(t) + u'(t) = ate^{-t} + (a - at)e^{-t} = (at + a - at)e^{-t} = ae^{-t}$$

Pour que $u(t)$ soit solution de l'équation (E), il faut donc que $a = 5$

La fonction $u(t) = 5te^{-t}$ est une solution particulière de (E)

3. La fonction $u(t) = 5te^{-t}$ est une solution particulière de (E) donc les solutions de (E) sont de la forme $y = f_k(y) + u(t)$, c'est-à-dire les fonctions $y = ke^{-t} + 5te^{-t}$ ou $y = (k + 5t)e^{-t}$ avec $k \in \mathbb{R}$

4. On a admis que f était une solution de l'équation (E), on a donc $f(t) = (k + 5t)e^{-t}$

$$\text{On cherche donc la valeur de } k \text{ telle que } f(0) = 0 \Leftrightarrow (k + 5 \times 0)e^0 = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

$$\text{On a donc } f(t) = 5te^{-t}$$

Partie C

1. Au bout d'un temps très long, la concentration dans le sang devient nulle (ou le médicament finit par disparaître dans le sang).

2. On a $f'(t) = 5e^{-t} - 5te^{-t} = (5 - 5t)e^{-t}$ et $f(1) = 5e^{-1}$

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0 ↗	$\frac{5}{e}$	↘ 0

3. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$, avec $1 \in [f(0); f(1)]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution $t_1 \in [0; 1]$

De même, f est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ avec $1 \in]\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t); 1]$

D'après le TVi, l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution $t_2 \in [1; +\infty[$

Il existe bien deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$.

À la calculatrice, on trouve $0,259 < t_1 < 0,260$ donc $t_1 \simeq 0,26$ et $2,542 < t_2 < 2,543$ donc $t_2 \simeq 2,54$

4. On a $f(t) \geq 1$ sur $[0,26; 2,54]$

donc la durée de l'intervalle est $2,54 - 0,26 = 2,28$ et $2,28 \times 60 \simeq 137$ minutes

Il y a donc risque de somnolence sur une période de 2h et 17 minutes

Correction Sujet 4

Partie A.

1. La fonction constante $f_0(x) = -\frac{-0,5}{0,05} = 10$ est une solution particulière de (E_1) :

En effet : on a $y' = 0$ et $0,05y - 0,5 = 0,05 \times 10 - 0,5 = 0,5 - 0,5 = 0$

Par ailleurs, les solutions de l'équation différentielle $y' = 0,05y$ sont les fonctions de la forme :

$f_k(x) = ke^{0,05x}$, avec $k \in \mathbb{R}$

Donc les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont les fonctions de la forme $y = f_k(x) + f_0(x)$

Soit les fonctions $y = ke^{0,05x} + 10$, avec $k \in \mathbb{R}$

On cherche $y(0) = 50 \Leftrightarrow ke^0 + 10 = 50 \Leftrightarrow k = 50 - 10 = 40$.

Il s'agit donc de la fonction **$y = 40e^{0,05x} + 10$**

2. On aurait alors :

x	0	5	10	15
y	50	61	76	95
Marge d'erreur	0	4,7 %	5%	5%

Ce modèle reflète bien la croissance de la population avec une marge d'erreur de 5% maximum par rapport aux données collectées.

Partie B

1. On vérifie $f(0) = \frac{800}{1+15e^0} = \frac{800}{16} = 50$

D'après les résultats du logiciel, on a $f'(x) = \frac{600e^{-0,05x}}{(1+15e^{-0,05x})^2}$

$$\begin{aligned}
 \text{et d'autre part : } 0,05f(x)(1 - 0,00125f(x)) &= 0,05 \times \frac{800}{1+15e^{-0,05x}} \times \left(1 - 0,00125 \times \frac{800}{1+15e^{-0,05x}}\right) \\
 &= \frac{40}{1+15e^{-0,05x}} \times \left(1 - \frac{1}{1+15e^{-0,05x}}\right) = \frac{40(1+15e^{-0,05x}-1)}{(1+15e^{-0,05x})^2} \\
 &= \frac{40 \times 15e^{-0,05x}}{(1+15e^{-0,05x})^2} = \frac{600e^{-0,05x}}{(1+15e^{-0,05x})^2}
 \end{aligned}$$

Il y a bien égalité, la fonction f vérifie bien l'équation : $f'(x) = 0,05f(x)(1 - 0,00125f(x))$, c'est-à-dire (E_2)

$$2. f(50) = \frac{800}{1+15e^{-0,05 \times 50}} = \frac{800}{1+15e^{-2,5}} \simeq 359$$

Avec ce nouveau modèle f , il y aurait environ 359 animaux en 2050.

3. Au bout d'un très grand nombre d'années, la population se stabiliserait autour de 800 individus.

4. On a $f'(x) = \frac{600e^{-0,05x}}{(1+15e^{-0,05x})^2}$ or, les exponentielles, comme les carrés, sont toujours positifs.

La dérivée étant positive sur $[0; +\infty[$, la **fonction f est bien croissante**.

$$5. 15e^{-0,05x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-0,05x} \geq \frac{1}{15} \Leftrightarrow -0,05x \geq \ln\left(\frac{1}{15}\right) \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{-0,05} \times (-\ln 15)$$

$$\Leftrightarrow x \leq \mathbf{20 \ln 15} \quad \text{CQFD}$$

$$6. a. \text{ D'après les résultats du logiciel, on a } f''(x) = \frac{30e^{-0,05x}(15e^{-0,05x}-1)}{(1+15e^{-0,05x})^3}$$

Et par conséquent, f'' est du signe du facteur $(15e^{-0,05x} - 1)$ tous les autres étant strictement positifs.

D'après la question précédente, on a donc

x	0	$20 \ln 15$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

$$\text{On a } f(20 \ln 15) = \frac{800}{1+15e^{-0,05 \times 20 \ln 15}} = \frac{800}{1+15e^{-\ln 15}} = \frac{800}{1+15e^{\ln(\frac{1}{15})}} = \frac{800}{1+15 \times \frac{1}{15}} = \frac{800}{2} = 400$$

La fonction f **est convexe sur $[0; 20 \ln 15]$ et concave sur $[20 \ln 15; +\infty[$** , et sa courbe a **un point d'inflexion** au point de coordonnées **$(20 \ln 15; 400)$**

b. On a

x	0	$20 \ln 15$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Donc la fonction f' est croissante sur $[0; 20 \ln 15]$ et décroissante ensuite. Avec $20 \ln 15 \simeq 54$

Donc la direction a raison

Correction Sujet 5

Partie A

1. On a $h'(t) = 0$ donc $y' + 0,48y = 0,48 \times \frac{1}{120} = \frac{48}{12000} = \frac{1}{250}$

L'égalité est vérifiée, la fonction **h est bien solution de l'équation différentielle (E_1)** .

2. On a $y' + 0,48y = 0 \Leftrightarrow y' = -0,48y$.

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme **$f_k(t) = ke^{-0,48t}$** , avec $k \in \mathbb{R}$

3. h est une solution particulière de l'équation différentielle (E_1) , donc les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont de la forme $y = f_k(t) + h(t)$ c'est-à-dire **$y = ke^{-0,48t} + \frac{1}{120}$** , avec $k \in \mathbb{R}$

Partie B

1. Si $p(t) = \frac{1}{y(t)}$ alors $p'(t) = \frac{-y'(t)}{y^2(t)}$ Alors :

$$p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p) \Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{250} \times \frac{1}{y} \left(120 - \frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow y' = \frac{-y^2 \left(120 - \frac{1}{y}\right)}{250y} \Leftrightarrow y' = \frac{-120y + 1}{250}$$

$$\Leftrightarrow y' = -\frac{120}{250}y + \frac{1}{250} \Leftrightarrow y' = -0,48y + \frac{1}{250} \Leftrightarrow y' + 0,48y = \frac{1}{250} \quad \text{CQFD}$$

2. D'après la question A3, la fonction y est de la forme $y = ke^{-0,48t} + \frac{1}{120}$, donc

$$p(t) = \frac{1}{y} = \frac{1}{ke^{-0,48t} + \frac{1}{120}} = \frac{1}{\frac{120ke^{-0,48t} + 1}{120}} = \frac{120}{120ke^{-0,48t} + 1}$$

En posant $K = 120k$, on obtient bien $p(t) = \frac{120}{1+Ke^{-0,48t}}$ avec $K \in \mathbb{R}$

3. On a $p(0) = 30 \Leftrightarrow \frac{120}{1+Ke^0} = 30 \Leftrightarrow 1+K = \frac{120}{30} \Leftrightarrow K = 4 - 1 = 3$ donc **$p(t) = \frac{120}{1+3e^{-0,48t}}$**

4. **Au bout d'un temps très long, la population dans le milieu se stabilisera autour de 120 000 bactéries**

5. On cherche à résoudre $p(t) \geq 60$:

$$\Leftrightarrow \frac{120}{1+3e^{-0,48t}} \geq 60 \Leftrightarrow 120 \geq 60(1+3e^{-0,48t}) \Leftrightarrow 1+3e^{-0,48t} \leq \frac{120}{60} \Leftrightarrow 3e^{-0,48t} \leq 2-1$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,48t} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow -0,48t \leq \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow t \geq \frac{-\ln 3}{-0,48} \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 3}{0,48}$$

Or $\frac{\ln 3}{0,48} \times 60 \simeq 137$ **La population dépasserait les 60 000 bactéries au bout d'environ 2h et 17 minutes**