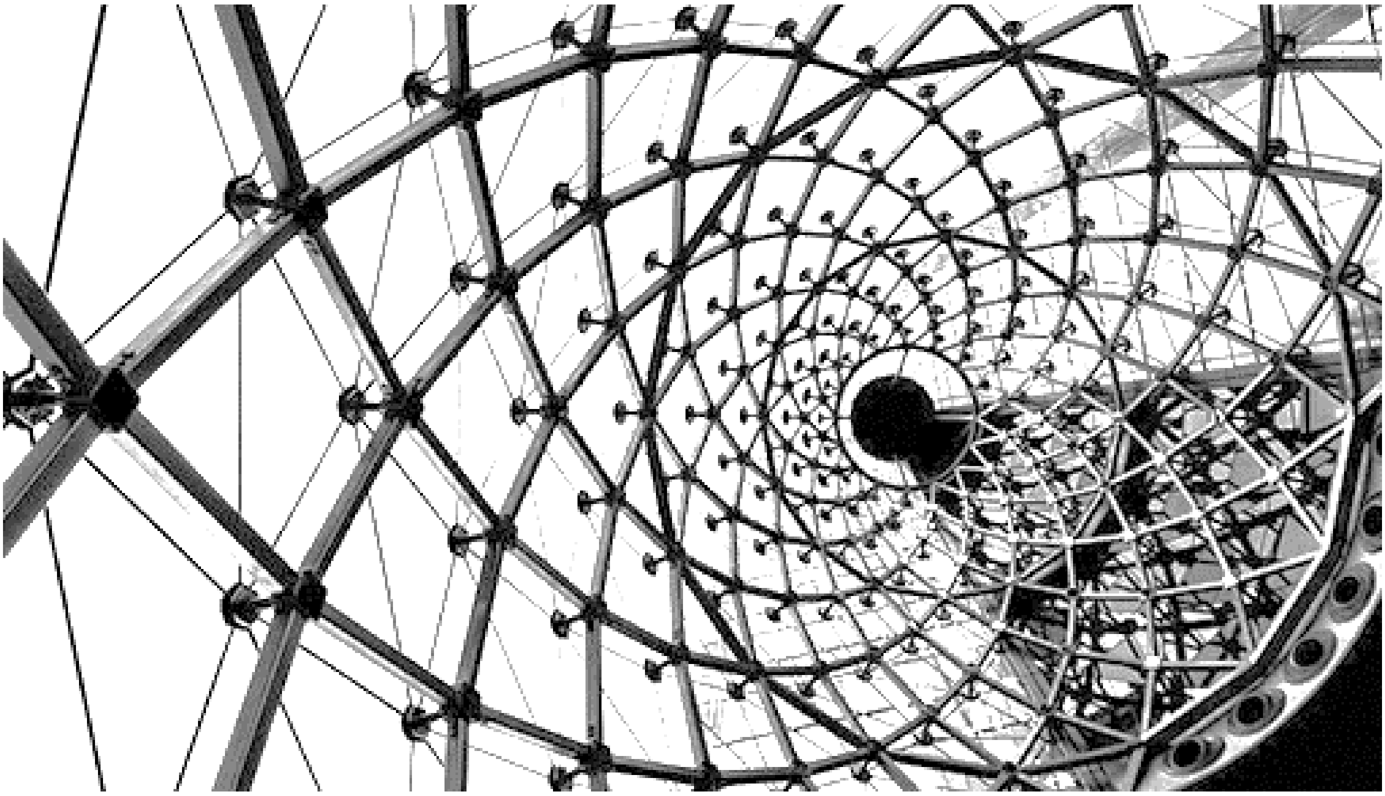
Chapitre 8

Dérivées de fonctions (1)

Savoirs

1ère partie

Df. 1	Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction
Df. 2	Tableau de variation d'une fonction à partir de la dérivée
Df. 3	Calcul de dérivée, multiples et sommes
Type bac 1	Étude de fonction



2ème partie

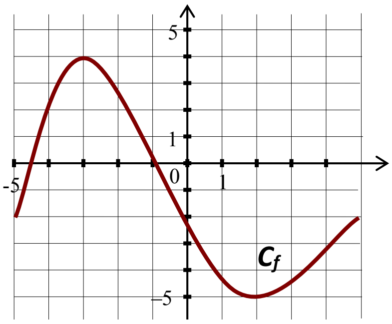
Df. 4	Calcul de dérivée, produit et quotients
Df. 5	Nombre dérivé et tangente, détermination graphique
Df. 6	Équation de tangente
Type bac 2	Étude de fonction

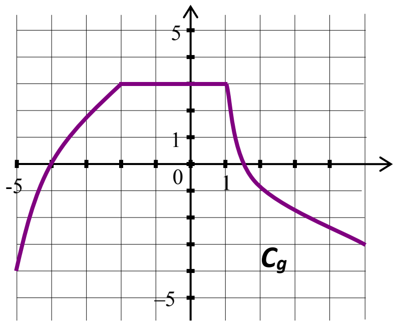
EXERCICES en classe

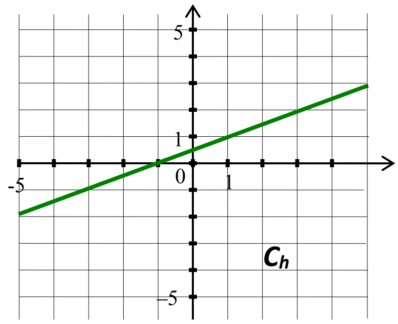
Savoir Df. 1 : Dérivée et sens de variation

Exercice 1 : De la fonction à la dérivée

1) À partir de l'observation graphique du sens de variation de la fonction, déterminer le signe de la dérivée



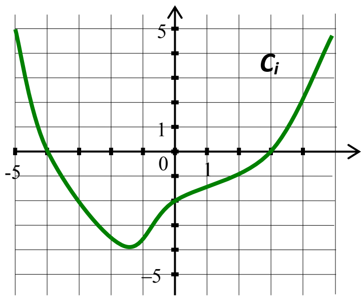


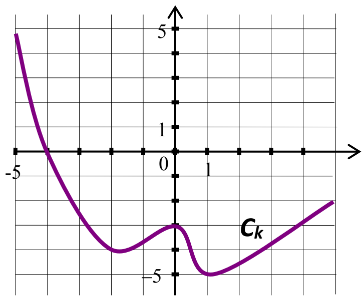


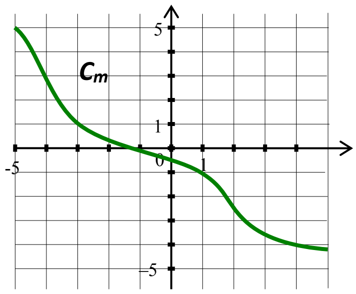
x	
$f'(x)$	

x	
$g'(x)$	

x	
$h'(x)$	







x	
$i'(x)$	

x	
$k'(x)$	

x	
$m'(x)$	

2) À partir du tableau de variation de la fonction, déterminer le tableau de signes de sa dérivée

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$					
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$g'(x)$					‖		
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$h'(x)$							
$h(x)$	-1	↗	5	↘	3	↗	$+\infty$

Exercice 2 : De la dérivée à la fonction

À partir du tableau de signe de la dérivée, compléter le tableau de variation de la fonction.

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$					

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$					

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$					

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$i'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$i(x)$							

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	0	0	$+$	
$k(x)$							

Avant la suite : Dérivées des fonctions de références

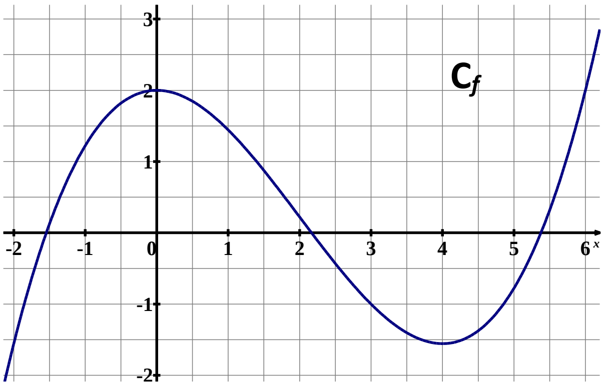
1) Déterminer le tableau de signe de la dérivée des fonctions de références (x^2 ; x^3 ; $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{x}$)

2) Déterminer, en séparant les différents cas selon le signe du coefficient m, le tableau de signe de la dérivée des fonctions affines : $f(x) = mx + p$

3) Déterminer, en séparant les différents cas selon le signe du coefficient a, le tableau de signe de la dérivée des fonctions polynômes du 2nd degré : $p(x) = ax^2 + bx + c$

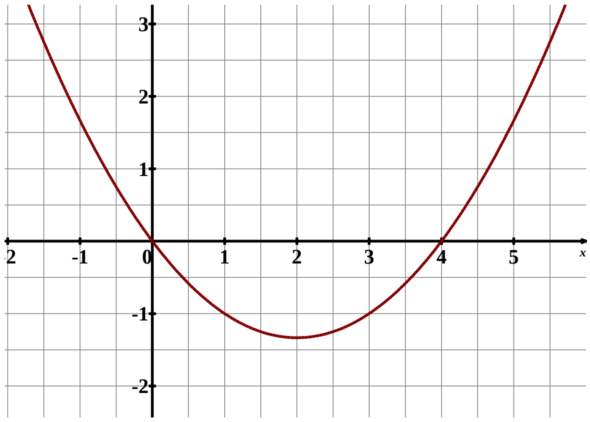
Exercice 3 : Lien entre les représentations graphique… le n°1 des QCM du bac

1) La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 6]$

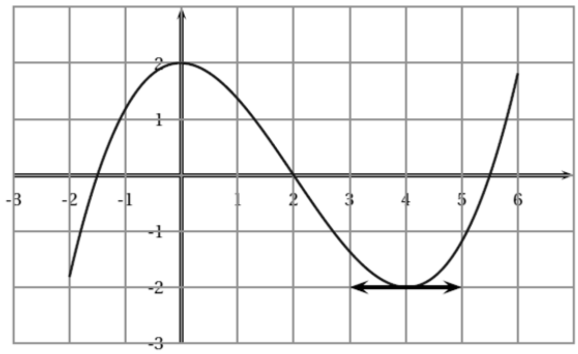


La fonction f est dérivable sur $[-2 ; 6]$ et on note f' sa dérivée.

La courbe ci-dessous peut-elle représenter cette dérivée f'



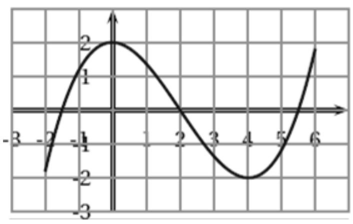
2) La courbe ci-contre représente une fonction g définie sur l'intervalle $[-2 ; 6]$



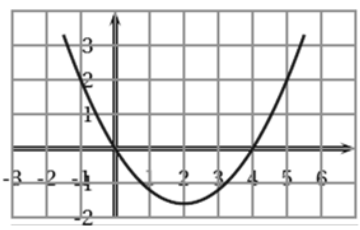
Question 1

La fonction g est dérivable sur $[-2 ; 6]$ et on note g' sa dérivée. Parmi les 4 courbes données ci-dessous, indiquer laquelle peut représenter g'

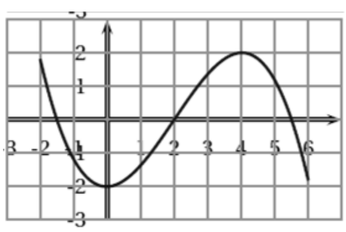
Réponse A



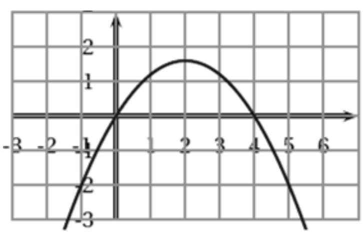
Réponse B



Réponse C



Réponse D



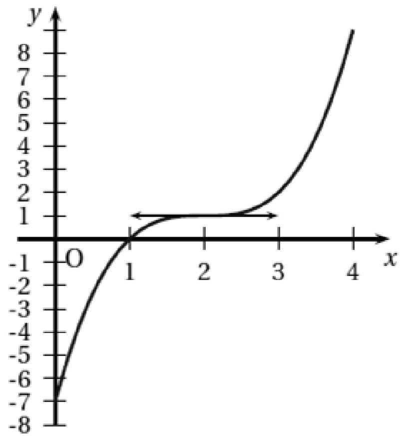
Question 2 : Le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $[-2 ; 6]$ est :

Réponse A : 0 **Réponse B :** 1 **Réponse C :** 2 **Réponse D :** 3

Question 3 : Le nombre de solutions de l'équation $g'(x) = 0$ sur l'intervalle $[-2 ; 6]$ est :

Réponse A : 0 **Réponse B :** 1 **Réponse C :** 2 **Réponse D :** 3

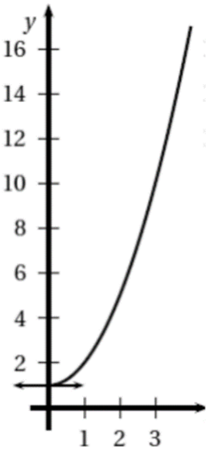
Exercice 3 (Suite)



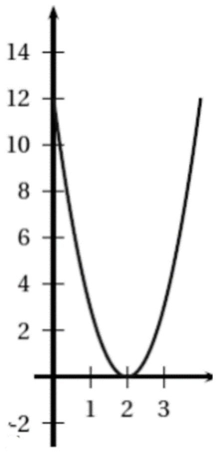
3) La représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 4] est données ci-contre.
On note g' sa dérivée sur l'intervalle [0 ; 4].

Parmi les 4 courbes suivantes, laquelle peut-être une représentation de la fonction g'

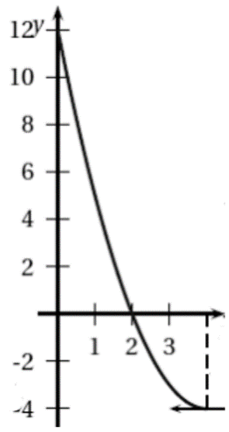
Réponse A



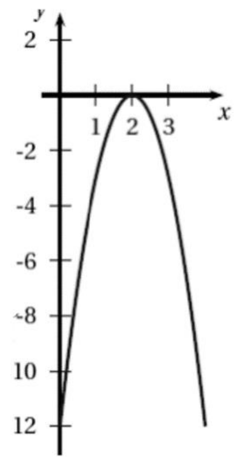
Réponse B



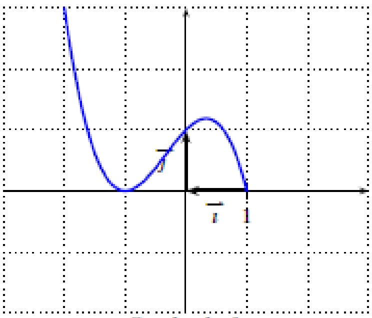
Réponse C



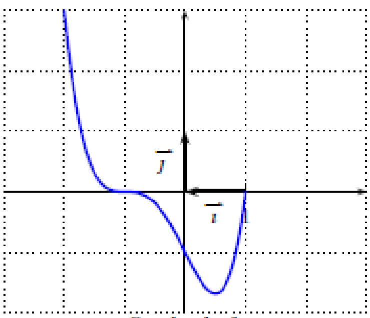
Réponse D



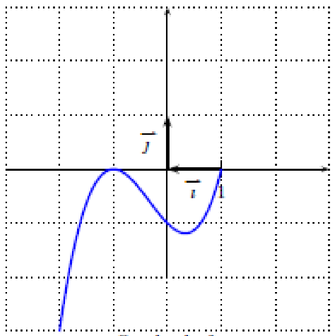
4) Les courbes ci-dessous représentent 4 fonctions f_1, f_2, f_3 *et* f_4 définies et dérivables sur $[-2 ; 1]$



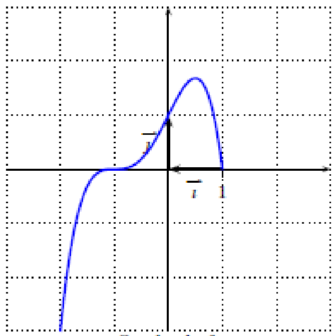
Courbe de f_1



Courbe de f_2



Courbe de f_3



Courbe de f_4

Question 1 : On donne ci-dessous 4 tableaux de signes – Associer chaque tableau à une des 4 fonctions

Tableau A

x	-2		-1		1
f		$-$	0	$+$	0

Tableau B

x	-2		-1		1
f		$+$	0	$+$	0

Tableau C

x	-2		-1		1
f		$-$	0	$-$	0

Tableau D

x	-2		-1		1
f		$+$	0	$-$	0

Question 2 : On donne ci-dessous 4 tableaux de signes de la **dérivée des fonctions** – Associer chaque tableau à une des 4 fonctions

Tableau A

x	-2		-1		$\frac{1}{3}$		1
f'		$+$	0	$+$	0	$-$	

Tableau B

x	-2		-1		$\frac{1}{2}$		1
f'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Tableau C

x	-2		-1		$\frac{1}{3}$		1
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tableau D

x	-2		-1		$\frac{1}{2}$		1
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Savoir Df. 2 : De la dérivée au tableau de variation

Exercice 4 : Construire le tableau de variation à l'aide de la dérivée

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 5$
On admet que sa dérivée f' est donnée par : $f'(x) = -4x(-x^2 + 3x + 4)$

a. Déterminer le tableau de signe de f' sur $\mathbb{R}$

b. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

c. Compléter le tableau de variation en calculant les valeurs des extrema de f

2) Soit la fonction g définie sur $[-3; 2]$ par $g(x) = (x^2 - x - 1)e^{x+1}$
On admet que sa dérivée g' est donnée par : $g'(x) = (x^2 + x - 2)e^{x+1}$

a. Déterminer le tableau de signe de g' sur $[-3 ; 2]$

b. En déduire le tableau de variation complet (avec les extrema) de g sur $[-3 ; 2]$

c. Déterminer un encadrement de $g(x)$ pour $x \in [-3; 2]$ (valeurs exactes)

3) Soit la fonction h définie sur $[0; 2]$ par $h(x) = \frac{-x}{x+1}$. On admet que : $h'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$

a. Justifier que la fonction h est décroissante sur $[0; 2]$

b. En déduire un encadrement de $h(x)$ sur $[0 ; 2]$

Exercice 5 : Étude de fonction (1) – Extrait sujet bac

Dans le parc national des Pyrénées, un chercheur travaille sur le déclin d'une espèce protégée dans les lacs de haute-montagne : le « crapaud accoucheur ». Dans certains lacs des Pyrénées, des truites ont été introduites par l'homme afin de permettre des activités de pêche en montagne. Le chercheur a étudié l'impact de cette introduction sur la population de crapauds accoucheurs d'un lac.
Ses études précédentes l'amènent à modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps par la fonction f suivante : $f(t) = (0{,}04t^2 - 8t + 400)e^{\frac{t}{50}} + 40$ pour $t \in [0 ; 120]$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t .

1. Déterminer le nombre de crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle [0; 120] et on note $f\ '$ sa fonction dérivée.
On donne : $f\ '(t) = 0{,}0008 \times t\ (t - 100)e^{\frac{t}{50}}$.

Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [0; 120], puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle (on donnera des valeurs approchées au centième).

3. Selon cette modélisation :

a. Déterminer le nombre de jours J nécessaires afin que le nombre de crapauds atteigne son minimum. Quel est ce nombre minimum ?

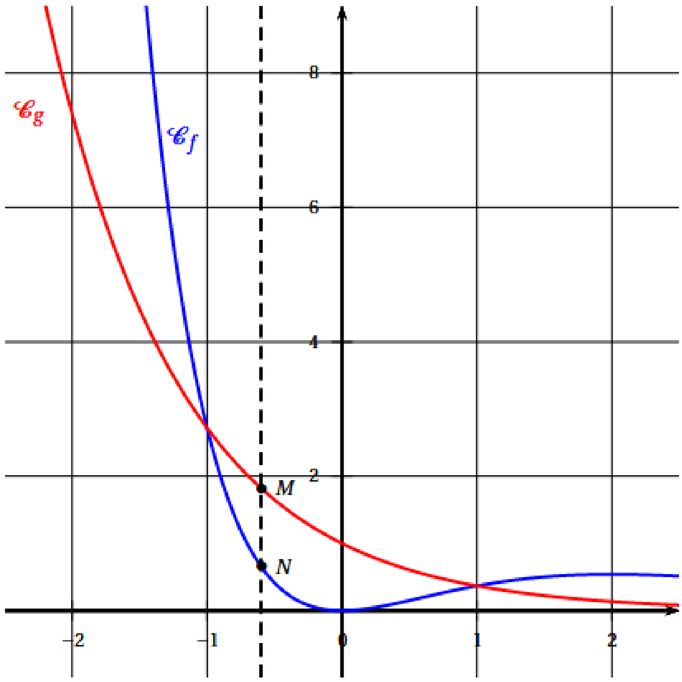
b. Justifier que, après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus.

Exercice 6 : Étude de fonction (2) – Extrait sujet bac **

Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x}$



1. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

b. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\,;\ 1]$, on considère les points M de coordonnées $(x\,;\ f(x))$ et N de coordonnées $(x\,;\ g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN.
On admet que : $d(x) = e^{-x} - x^2e^{-x}$.
On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1\,;\ 1]$ et on note d' sa fonction dérivée.
On donne : $d'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$.

a. En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1\,;\ 1]$.

b. Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale, et donner une valeur approchée à 0, 1 près de la distance M_0N_0.

Savoir Df. 3 : Calcul de dérivée – Somme et multiples

Exercice 7 : Dérivée des fonctions de référence - multiples

Dériver les fonctions suivantes :

$f(x) = 5x^3$	$g(x) = 2e^x$	$h(x) = \dfrac{4}{x}$	$i(t) = -6t^7$	$j(x) = \dfrac{2}{3}$
$k(x) = -\dfrac{1}{2x}$	$l(x) = 6\sqrt{x}$	$m(t) = -3e^t$	$n(x) = -7x$	$p(x) = \dfrac{5}{2x}$
$q(y) = \dfrac{6y}{11}$	$r(x) = \dfrac{1}{3}x^3$	$s(x) = 12x^2$	$t(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{x}$	$u(x) = 0{,}15x^4$
$v(x) = -1$	$w(a) = 7a^4$	$a(x) = -\dfrac{e^x}{e}$	$b(x) = \dfrac{-1}{3x}$	$c(x) = -\dfrac{2}{15}x^5$

Exercice 8 : Dérivée de polynômes

1) Dériver les fonctions suivantes

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$ $\quad g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$ $\quad h(t) = 7t^4 - t^2 + 3$ $\quad i(x) = \dfrac{1}{2}x^3 - 6x^2 + x$

$j(x) = 0{,}1x^5 - 0{,}2x^3 + 0{,}01$ $\quad k(x) = \dfrac{3}{4}x^4 - \dfrac{1}{4}x^2 - x$ $\quad l(n) = \dfrac{n^2}{2} + 5n - \dfrac{1}{6}$

Exercice 8 (suite)

2) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x - 7$

a. Calculer $f'(x)$

b. Déterminer le tableau de signe de f'

c. En déduire le tableau de variation de f

d. Compléter ce tableau en rajoutant les valeurs des extrema

3) On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{2x^3}{3} - 6x^2 + 18x - 1$

a. Dériver g

b. Étudier le signe de g'

c. En déduire le tableau de variation (complet) de g

4) On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} - 5x^2 + 12x + 1$

a. Calculer $f'(x)$

b. Montrer que $f'(x) = 2(x-3)(x^2+x-2)$

c. Établir le tableau de signe de la dérivée f'

d. En déduire le tableau de variation de la fonction f

e. Montrer que, pour $x \in [-2\,;\,3]$, on a $f(x) \leq \frac{43}{6}$

Vers la spé term : Avec des paramètres

On définit sur $\mathbb{R}$ et pour $m \in \mathbb{R}^*$, la fonction $f(x) = \frac{mx^3}{3} - mx^2 - (1-m)x + 3m$

1) Calculer $f'(x)$ en fonction de m

2) a. Pour quelles valeurs de m la fonction f sera-t-elle strictement décroissante ?

b. On suppose que $m = -1$.
À partir des questions (1) et (2a), en déduire le tableau de variation complet de f

Exercice 9 : Autres fonctions

1) Dériver les fonctions suivantes

$f(x) = 3e^x - x + 2$ $\quad$ $g(x) = 4x - \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $h(x) = 6\sqrt{x} - 5$ $\quad$ $i(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{x}{4}$

$j(x) = 2x^2 - 5e^x + 4$ $\quad$ $k(t) = \dfrac{t^2}{2} - 3t + \dfrac{4}{3t}$ $\quad$ $l(n) = \dfrac{\sqrt{n}}{3} - 4n$ $\quad$ $m(a) = 1 - e^a$

2) On définit sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f par $f(x) = x + 6 + \frac{4}{x}$

a. Calculer $f'(x)$. Montrer qu'on a, pour tout réel x non nul, $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$

b. Étudier le signe de $f'(x)$

c. En déduire le tableau de variation complet de f

Exercice 10 : Étude de fonction (3) – Sujet bac 1e

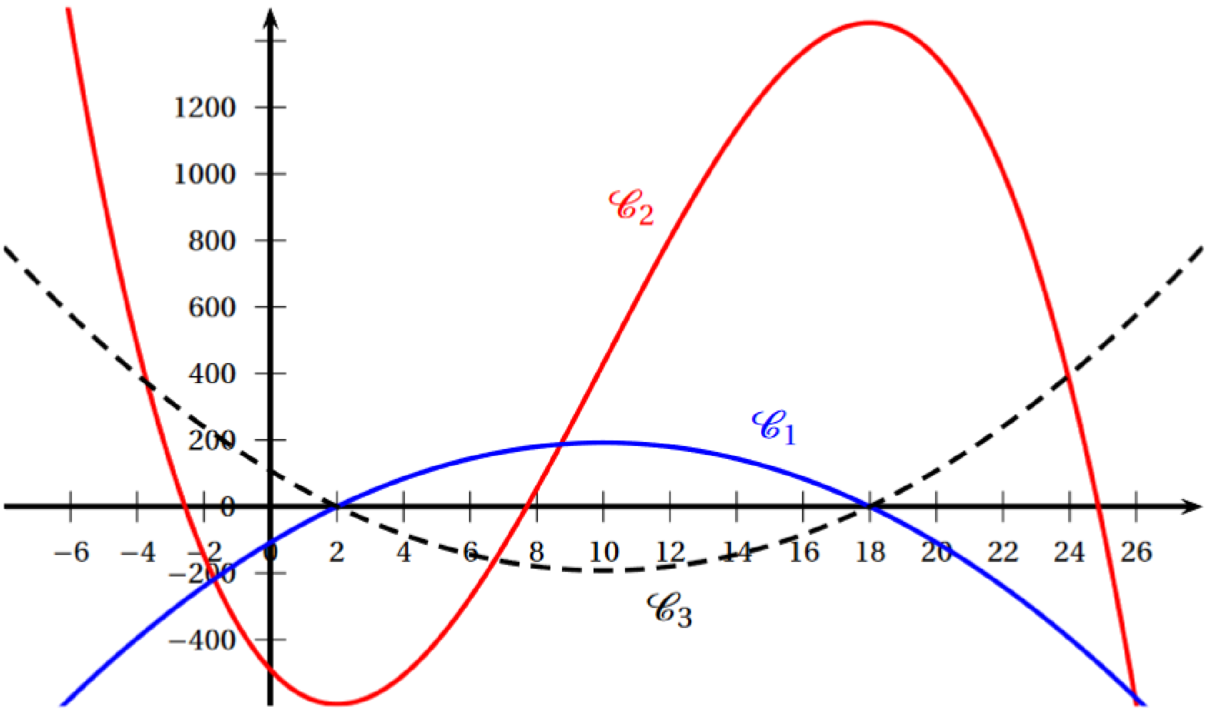
Soit h la fonction définie sur [0 ; 26] par : $h(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 490$.

1. Soit h' la fonction dérivée de h. Exprimer $h'(x)$ en fonction de x.

2. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h et $\mathcal{C}'$ celle de h'.

a. Identifier $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sur le graphique orthogonal ci-dessous parmi les trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ proposées.

b. Justifier le choix pour $\mathcal{C}'$.



3. Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction h sur [0 ; 26].

Exercice 11 : Étude de fonction (4) – Sujet bac 1e

Une entreprise produit du tissu.
Le coût total de production (en €) de l'entreprise est modélisé par la fonction :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$$

où x est la longueur de tissu fabriqué exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.
Chaque kilomètre de tissu est vendu 680 €.

On note $B(x)$ le résultat de l'entreprise, c'est-à-dire la différence entre la recette et le coût de production, pour la vente de x kilomètres de tissu.

1. Quel est le résultat de l'entreprise pour la vente de 3 kilomètres de tissu ?

2. Montrer que : $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.

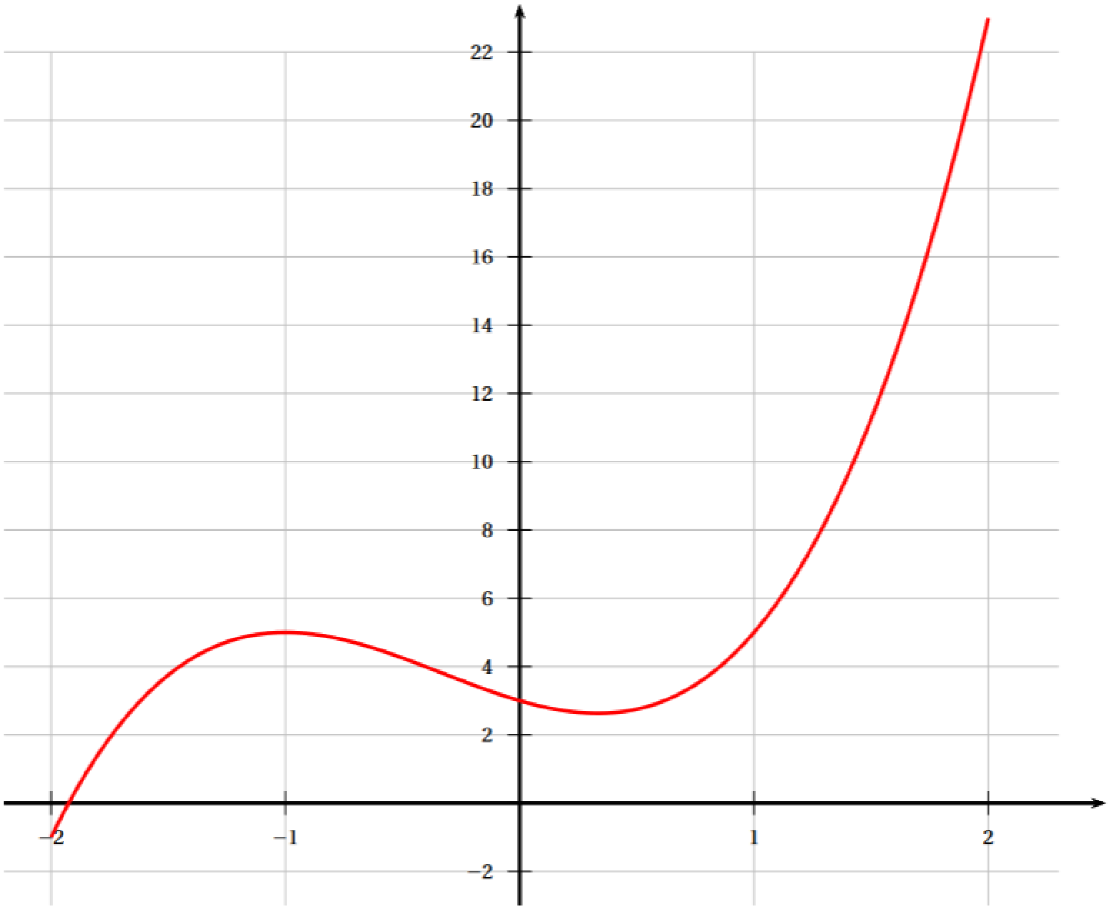
3. Donner une expression de $B'(x)$, où B' est la fonction dérivée de la fonction B.

4. Dresser le tableau de signes de $B'(x)$ sur [0 ; 10] puis le tableau de variations de la fonction B.

5. Combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit-elle produire afin d'obtenir un résultat maximal ?

Exercice 12 : Étude de fonction (5) – Sujet bac 1e

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ par : $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3$
Soit C sa représentation graphique dans le repère suivant.



1. On considère la droite d d'équation $y = 2x + 3$.

a. Montrer que déterminer les abscisses des points d'intersection entre la droite d et la courbe C revient à résoudre l'équation $2x(x^2 + x - 2) = 0$ sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$.

b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre d et C.

2. On considère la droite d' d'équation $y = 2x + a$ où a est un nombre réel.
À l'aide du graphique, donner une valeur de a pour laquelle la droite d' et la courbe C ont un seul point d'intersection.

3. On note f' la fonction dérivée de f .

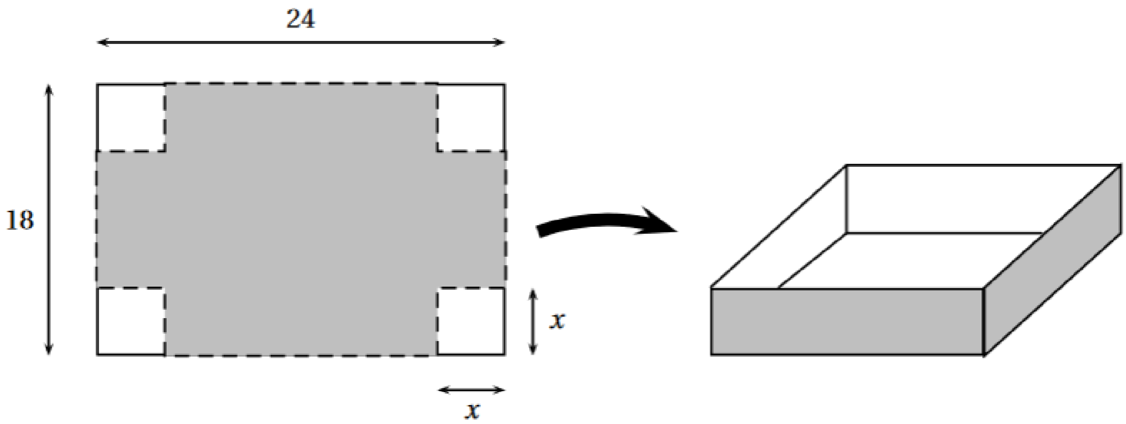
a. Démontrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$,

$$f'(x) = 6(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

b. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$.

Exercice 13 : Étude de fonction (6) – Sujet bac 1e

Un industriel souhaite fabriquer une boîte sans couvercle à partir d'une plaque de métal de 18 cm de largeur et de 24 cm de longueur. Pour cela, il enlève des carrés dont la longueur du côté mesure x cm aux quatre coins de la pièce de métal et relève ensuite verticalement pour fermer les côtés.



Le volume de la boîte ainsi obtenue est une fonction définie sur l'intervalle [0 ; 9] notée $V(x)$.

1. Justifier que pour tout réel x appartenant à [0 ; 9] : $V(x) = 4x^3 - 84x^2 + 432x$.

2. On note V' la fonction dérivée de V sur [0 ; 9]. Donner l'expression de $V'(x)$ en fonction de x.

3. Dresser alors le tableau de variations de V en détaillant la démarche.

4. Pour quelle(s) valeur(s) de x la contenance de la boîte est-elle maximale ?

5. L'industriel peut-il construire ainsi une boîte dont la contenance est supérieure ou égale à 650 cm3 ? Justifier.

Exercice 14 : Étude de fonction (6) – Sujet bac 1e

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$ par : $g(x) = e^x - x + 1$.

1. On admet que g est dérivable sur l'intervalle [−5 ; 5] et on note g' sa fonction dérivée. Calculer $g'(x)$.

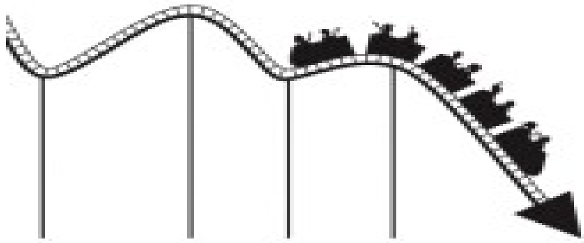
2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle [−5 ; 5].

3. Démontrer que g est strictement positive sur $[-5\ ;\ 5]$, c'est-à-dire que : pour tout $x \in [-5\ ;\ 5]$, $g(x) > 0$.

Soit f la fonction définie sur $[-5\ ;\ 5]$ par : $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{e^x}$
On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.
On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$ et on note f' sa fonction dérivée.

4. On admet que pour tout réel x de $[-5\ ;\ 5]$, $f'(x) = \dfrac{1}{e^x} \times g(x)$
En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$.

Corrections



Corrigés Savoir Df. 1

Corrigé Exercice 1

1)

x	-5		-3		2		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-5		-2		1		5
$g'(x)$		$+$	0	0	0	$-$	

x	-5		5
$h'(x)$		$+$	

x	-5		$-1{,}4$		5
$i'(x)$		$-$	0	$+$	

x	-5		-2		0		1		5
$k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-5		5
$m'(x)$		$-$	

2)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	$-\infty$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	-1	↗	5	↘	3	↗	$+\infty$

Corrigé Exercice 2

x	$-\infty$		-6		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$			↗		

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗		↘	

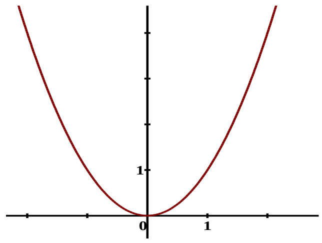
x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$i'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$i(x)$		↗		↘		↗	

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	0	0	$+$	
$k(x)$		↘		→		↗	

Corrigé Avant la suite

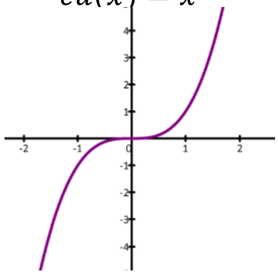
1)

$ca(x) = x^2$



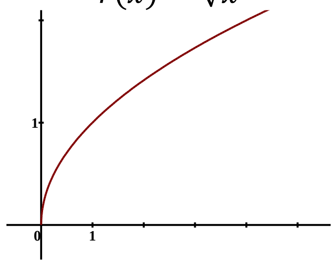
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ca'(x)$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

$cu(x) = x^3$



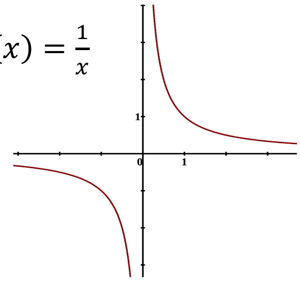
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$cu'(x)$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

$r(x) = \sqrt{x}$



x	0	$+\infty$
$r'(x)$	$+$	

$i(x) = \frac{1}{x}$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$i'(x)$	$-$	$\|\|$	$-$

2) Fonction affine $\Rightarrow$ Selon le signe du coefficient directeur *m* la fonction affine est croissante ou décroissante… ça donne trois tableaux de signes possibles pour la dérivée d'une affine

Si $m > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	
$f'(x)$	$+$	

Si $m = 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\rightarrow$	
$f'(x)$	0	

Si $m < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	
$f'(x)$	$-$	

3) Fonctions polynômes du 2nd degré $\Rightarrow$ Il faut discuter par rapport au signe du coefficient du 2nd degré *a* qui va donner le sens de variation, et le point où la dérivée change de signe a pour abscisse x_0…

Si $a > 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$p(x)$ $ax^2 + bx + c$		$\searrow$	$p(x_0)$	$\nearrow$	
$p'(x)$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$p(x)$ $ax^2 + bx + c$		$\nearrow$	$p(x_0)$	$\searrow$	
$p'(x)$		$+$	0	$-$	

Corrigé Exercice 3

1) OUI À partir de la courbe on peut avoir le tableau de variation de *f* et donc le tableau de signe de *f'*

x	-2		0		4		6
$f(x)$	$-1{,}5$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\mathbf{2}$
$f'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

En comparant avec la seconde courbe, la fonction dérivée semble bien correspondre : positive sur [−2 ; 0] et sur [4 ; 6] et négative sur [0 ; 4]…

2) Question 1 – **Réponse B** Question 2 – **Réponse D** Question 3 – **Réponse C**

3) Réponse B

4) Question 1

Fonction	f_1	f_2	f_3	f_4
Tableau de signe des fonctions	B	D	C	A

Question 2

Fonction dérivée	f'_1	f'_2	f'_3	f'_4
Tableau de signe des dérivées	C	B	D	A

Corrigés Savoir Df. 2

Corrigé Exercice 4

1) a. Pour $-x^2+3x+4$ on a $\Delta = 25$; $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$
Donc

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$-4x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$-x^2+3x+4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-123	$\nearrow$	

b & c. Voir dernière ligne du tableau précédent
On calcule avec f : par exemple $f(0) = 0^4 - 4\times 0^3 - 8\times 0^2 + 5 = 5$
On peut aussi utiliser le tableur de la calculatrice, attention à bien rentrer $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 5$ et non la dérivée

2) a. Pour x^2+x-2 on a $\Delta = 9$; $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$
Donc

x	-3		-2		1		2
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^{x+1}		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$g'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$g(x)$	$\frac{11}{e^2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{e}$	$\searrow$	$-e^2$	$\nearrow$	e^3

b. Voir dernière ligne du tableau ci-dessus.
En valeur exactes, puis approchées on a : $g(-3) = ((-3)^2-(-3)-1)e^{-3+1} = 11e^{-2} = \boldsymbol{\frac{11}{e^2}} \simeq \mathbf{1,5}$
$g(-2) = ((-2)^2-(-2)-1)e^{-2+1} = 5e^{-1} = \boldsymbol{\frac{5}{e}} \simeq \mathbf{1,8}$
$g(1) = (1^2-1-1)e^{1+1} = \boldsymbol{-e^2} \simeq \mathbf{-7,4}$ **et** $g(2) = (2^2-2-1)e^{2+1} = \boldsymbol{e^3} \simeq \mathbf{273}$

c. D'après les valeurs ci-dessus, le minimum de g sur $[-3;2]$ est $g(1) = -e^2$ et le maximum est $g(3) = e^3$
Donc : $\boldsymbol{-e^2 \leq g(x) \leq e^3}$

3) a. On a toujours $(x+1)^2 \geq 0$ et donc, par signe d'un quotient $h'(x) < 0$ (vous pouvez faire le tableau de signe si vous préférez).
La dérivée h' est négative sur $[0;2]$ donc la fonction h y est décroissante.

b. On a avec $h(0) = 0$ et $h(2) = -\frac{2}{3}$

x	0		2
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$

Donc $\boldsymbol{-\frac{2}{3} \leq h(x) \leq 0}$

Corrigé Exercice 5

1. On a $f(0) = 400 \times 1 + 40 = 440$. Il y avait 440 crapauds dans le lac lors de l'introduction des truites.
2.

t	0		100		120
$0{,}0008t$		+		+	
$t - 100$		−	0	+	
$e^{\frac{t}{50}}$		+		+	
$f'(t)$		**−**	**0**	**+**	
$f(t)$	440	↘	40	↗	≃ 216,37

3. a. Il faut 100 jours pour que le nombre de crapauds atteigne son minimum, donc $J = 100$.
Il y aura au minimum 40 crapauds.

b. Au bout de 120 jours il y aura 216 crapauds, donc le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus après avoir atteint son minimum.

c. On constate que $f(115) < 140 < f(116)$ donc c'est à partir de 116 jours qu'il y aura plus de 140 crapauds.

Corrigé Exercice 6 **

1. a. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2e^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow (x^2 - 1)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = -1 \ ou \ x = 1$
On a $g(-1) = e^{-(-1)} = e$ et $g(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$
Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont pour coordonnées $(\boldsymbol{-1}; \boldsymbol{e})$ **et** $\left(\boldsymbol{1}; \boldsymbol{\frac{1}{e}}\right)$

b. $f(x) - g(x) = x^2e^{-x} - e^{-x} = (x^2 - 1)e^{-x}$
Donc

x	0		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	−	0	+	
e^{-x}		+	$\vert$	+	$\vert$	+	
$f(x) - g(x)$		+	0	−	0	+	

Pour $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$, on a $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$ donc $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ **est au dessus de** $\boldsymbol{\mathcal{C}_g}$
Pour $x \in [-1; 1]$, on a $f(x) - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ donc $\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$ **est en dessous de** $\boldsymbol{\mathcal{C}_g}$

2. a. Pour $x^2 - 2x - 1$, on a $\Delta = 8$ et $x_1 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 - \sqrt{2}$
alors

x	-1		$1 - \sqrt{2}$		1
$x^2 - 2x - 1$	$\vert$	+	0	−	
e^{-x}	$\vert$	+	$\vert$	+	
$d'(x)$	$\vert$	+	0	−	
$d(x)$	0	↗	$(2\sqrt{2} - 2)e^{-1+\sqrt{2}}$	↘	0

Avec $d(-1) = e^1 - 1 \times e^1 = 0$; $d(1) = e^{-1} - 1 \times e^{-1} = 0$
et $d(1 - \sqrt{2}) = e^{-1+\sqrt{2}} - (1 - \sqrt{2})^2e^{-1+\sqrt{2}} = (1 - 1 + 2\sqrt{2} - 2)e^{-1+\sqrt{2}} = (2\sqrt{2} - 2)e^{-1+\sqrt{2}}$

b. D'après le tableau de variation, la distance maximale est atteinte pour $x_0 = 1 - \sqrt{2}$.
On a alors $d(x_0) = (2\sqrt{2} - 2)e^{-1+\sqrt{2}}$ soit $M_0N_0 \simeq 1{,}3$

Corrigés Savoir Df. 3

Corrigé Exercice 7

$f'(x) = \mathbf{15x^2}$ $g'(x) = \mathbf{2e^x}$ $h'(x) = -\mathbf{\frac{4}{x^2}}$ $i'(t) = \mathbf{-42t^6}$ $j'(x) = \mathbf{0}$

$k'(x) = +\mathbf{\frac{1}{2x^2}}$ $l'(x) = \frac{6}{2\sqrt{x}} = \mathbf{\frac{3}{\sqrt{x}}}$ $m'(t) = \mathbf{-3e^t}$ $n'(x) = \mathbf{-7}$ $p'(x) = -\mathbf{\frac{5}{2x^2}}$

$q'(y) = \mathbf{\frac{6}{11}}$ $r'(x) = \frac{3}{3}x^2 = \mathbf{x^2}$ $s'(x) = \mathbf{24x}$ $t'(x) = \mathbf{\frac{1}{6\sqrt{x}}}$ $u'(x) = \mathbf{0,6x^3}$

$v'(x) = \mathbf{0}$ $w'(a) = \mathbf{28a^3}$ $a'(x) = -\mathbf{\frac{e^x}{e}}$ $b'(x) = \mathbf{\frac{1}{3x^2}}$ $c'(x) = -\frac{10}{15}x^4 = -\mathbf{\frac{2}{3}x^4}$

Corrigé Exercice 8

1)

$f'(x) = \mathbf{6x^2 - 10x}$ $g'(x) = \mathbf{4x^3 - 9x^2 + 2}$ $h'(t) = \mathbf{28t^3 - 2t}$ $i'(x) = \mathbf{\frac{3}{2}x^2 - 12x + 1}$

$j'(x) = \mathbf{0,5x^4 - 0,6x^2}$ $k'(x) = \frac{12}{4}x^3 - \frac{2}{4}x - 1 = \mathbf{3x^3 - \frac{1}{2}x - 1}$ $l'(n) = \frac{2n}{2} + 5 = \mathbf{n + 5}$

2) a. $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$

b, c & d. On a $\Delta = 324$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -5$ positif à l'extérieur des racines

Pour les extrema, on a $f(-5) = (-5)^3 + 6 \times (-5)^2 - 15 \times (-5) - 7 = 93$

Et $f(1) = 1^3 + 6 \times 1^2 - 15 \times 1 - 7 = 1$

Donc

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	93	$\searrow$	1	$\nearrow$	

3) a. $g'(x) = 2x^2 - 12x + 18$

b. & c. On a $\Delta = 0$; $x_0 = 3$ positif partout

on a $g(3) = \frac{2\times3^3}{3} - 6 \times 3^2 + 18 \times 3 - 1 = 17$ mais ce n'est pas un extremum ! Pour que le point où $f'(x) = 0$ soit un extremum, il faut que la dérivée y change de signe… Sinon c'est un point d'inflexion, mais vous verrez ça l'année prochaine

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	17	$\nearrow$	

4) $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} - 5x^2 + 12x + 1$

a. $f'(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$

b. On a $2(x-3)(x^2 + x - 2) = 2(x^3 + x^2 - 2x - 3x^2 - 3x + 6) = 2(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)$

$= 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = f'(x)$ CQFD

c. & d. Pour $x^2 + x - 2$, on a $\Delta = 9$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$ positif à l'extérieur des racines

On a pour les extrema : $f(-2) = \frac{(-2)^4}{2} - \frac{4\times(-2)^3}{3} - 5\times(-2)^2 + 12\times(-2)\ + 1 = -\frac{73}{3}$

$f(1) = \frac{43}{6}$ et $f(3) = -\frac{7}{2}$

(Utiliser le tableur de la calculatrice dès que vous dépassez 2 valeurs à calculer)

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$f(x)$		↘	$-\frac{73}{3}$	↗	$\frac{43}{6}$	↘	$-\frac{7}{2}$	↗	

e. Sur $x \in [-2\ ;\ 3]$, le **maximum** de la fonction est $\frac{43}{6}$, donc on a bien $\boldsymbol{f(x) \leq \frac{43}{6}}$

Corrigé Vers la spé term

1) Il faut dériver en regardant m comme une constante, comme si c'était un 2 ou un 3

$f'(x) = \boldsymbol{mx^2 - 2mx + m - 1}$

2) a. $\Rightarrow \Delta_m = 4m^2 - 4m(m-1) = \boldsymbol{4m}$

<u>**Comment chercher**</u> :
La fonction f sera strictement décroissante si sa dérivée f' est strictement négative.
Or le signe de la dérivée dépend de m…
• si $\boldsymbol{m > 0}$, le Δ_m sera positif, et le polynôme $f'(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$ changera de signe (du signe de m à l'extérieur des racines, donc ici positif, , négatif à l'intérieur…)
• Par contre, ***si*** $\boldsymbol{m < 0}$, $\Delta_m$sera négatif et le polynôme $f'(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$ n'aura pas de racine : il sera de signe constant, du signe de m, c'est-à-dire, dans notre hypothèse, négatif…
On reconstruit le raisonnement dans l'autre sens pour rédiger :

Si $\boldsymbol{m < 0}$, $\Delta_m < 0$, la dérivée $f'(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$ est de signe constant, celui de m donc négatif.
Et par conséquent la fonction sera strictement décroissante.

b. $m = -1 \quad \Rightarrow$ On a $f'(x) = -x^2 + 2x - 3$
$\Delta = -4 \quad (f'$ est de signe constant, négatif (on le savait)

x	$-\infty \qquad +\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	↘

Corrigé Exercice 9

1)

$f'(x) = \boldsymbol{3e^x - 1}$ $\qquad g'(x) = \boldsymbol{4 + \frac{1}{x^2}}$ $\qquad h'(x) = \boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{x}}}$ $\qquad i'(x) = \boldsymbol{\frac{-5}{x^2} + \frac{1}{4}}$

$j'(x) = \boldsymbol{4x - 5e^x}$ $\qquad k'(t) = \boldsymbol{t - 3 - \frac{4}{3t^2}}$ $\qquad l'(n) = \boldsymbol{\frac{1}{6\sqrt{n}} - 4}$ $\qquad m'(a) = \boldsymbol{-e^a}$

2) a. $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$. On a $\frac{x^2-4}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} = 1 - \frac{4}{x^2} = f'(x)$ CQFD

b. et **c.** Pour les extrema on a : $f(-2) = -2 + 6 + \frac{4}{-2} = 2$ et $f(2) = 10$

Voir tableau page suivante

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x^2		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$g'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\Vert$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$g(x)$		↗	**2**	↘	$\Vert$	↘	**10**	↗	

Corrigé Exercice 10

1. $h'(x) = -3x^2 + 60x - 108$

2. a. $\mathcal{C}$ est la courbe $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}'$ est la courbe $\mathcal{C}_1$

Pour trouver, on compare les tableaux de variations et tableaux de signes :

x	-6		2		18		26
$\mathcal{C}_1$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

x	-6		10		26
$\mathcal{C}_1$		↗		↘	

x	-6		$-2,5$		$7,5$		25		26
$\mathcal{C}_2$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	0	$-$	

x	-6		2		18		26
$\mathcal{C}_2$		↘		↗		↘	

x	-6		2		18		26
$\mathcal{C}_3$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

x	-6		10		26
$\mathcal{C}_3$		↘		↗	

Le signe de la fonction de la courbe $\mathcal{C}_2$ ne correspond à aucune des variations des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$: il s'agit donc de celle la fonction.
Du coup ses variations doivent correspondre aux signes des courbes $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_3$. Ce qui nous permet de choisir la $\mathcal{C}_1$ (comme expliqué au b)

b. Pour $\mathcal{C}'$ comme la fonction est décroissante par exemple sur $[-6;\ -2]$, sa dérivée doit être négative sur cet intervalle : cela correspond à la courbe $\mathcal{C}_1$

3. $h'(x) = -3x^2 + 60x - 108$ donc on a $\Delta = 2\,304$ et $x_1 = 2$; $x_2 = 18$ négative à l'extérieur des racines
Donc

x	0		2		18		26
$h'(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
$h(x)$	-490	↘	-594	↗	1454	↘	-594

Pour les extrema, utilisez le tableur de la calculatrice, mais attention à bien rentrer la fonction (c'est-à-dire $h(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 490$… si vous rentrez la dérivée, vous aurez des zéro en 2 et 18…)

Corrigé Exercice 11

1. Pour $x = 3$ on a $b(3) = 3 \times 680 - C(3) = 2040 - (15 \times 3^3 - 120 \times 3^2 + 500 \times 3 + 750) = 465$
Le résultat de l'entreprise pour la vente de 3 kilomètres de tissu est de 465 €

2. $B(x) = R(x) - C(x) = 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750)$
$= 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750 = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$ CQFD

3. $B'(x) = \boldsymbol{-45x^2 + 240x + 180}$

4. On a $\Delta = 90\,000$ et $x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = 6$ et négative à l'extérieur des racines
Donc

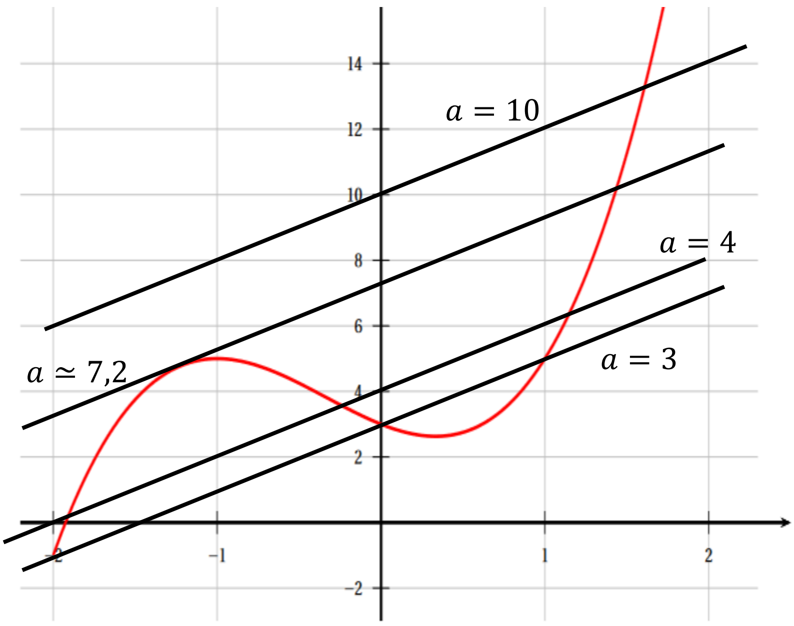
x	0		6		10
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-750	↗	1410	↘	-1950

5. L'entreprise doit produire **6 km de tissus** pour obtenir un résultat maximal de **1 410 €**

Corrigé Exercice 12

1. a. $f(x) = y \Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 = 2x + 3 \Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + x - 2) = 0$
CQFD

b. Pour résoudre cette équation produit nul :
soit $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
soit $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9$ et $x_1 = -2$; $x_2 = 1$
$\Rightarrow$ On a donc $S = \{-2; 0; 1\}$
On calcule les images correspondantes
(vous pouvez calculer $f(-2)$; $f(0)$ ou $f(1)$ mais ce sera plus simple en prenant la fonction affine de d)
$y_{-2} = 2 \times (-2) + 3 = -1$; $y_0 = 3$
et $y_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$
On a donc les coordonnées des 3 points d'intersection : $\boldsymbol{A(-2;\ -1)}$; $\boldsymbol{B(0;3)}$ **et** $\boldsymbol{C(1;5)}$



2. Toutes les droites d' ont des coefficients directeur de 2, et une ordonnée à l'origine de a.
On illustre sur le graphique pour différentes valeurs de a : on remarque qu'à partir d'environ $a = 7{,}2$ les droites d' n'auront plus qu'un seul point d'intersection…
Vous pouvez donc choisir **n'importe quelle valeur de $\boldsymbol{a}$ entre 7,5 et 22…**

3. a. $f'(x) = 6x^2 + 4x - 2$ On a $\Delta = 64$ et $x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -1$
Donc $f'(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1)$
CQFD
(vous pouvez aussi développer le produit pour retrouver la forme réduite)

x	-2		-1		$\frac{1}{3}$		2
$f'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$f(x)$	-1	↗	3	↘	$\frac{71}{27}$	↗	23

b. Avec $f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{3} + 3$
$= \frac{2}{27} + \frac{2}{9} - \frac{2}{3} + 3 = \frac{2+6-18+81}{27} = \frac{71}{27}$

Corrigé Exercice 13

1. Le fond de la boite a pour longueur $24-2x$ et pour largeur $18-2x$. La boite a comme hauteur x
Donc $V(x)=L\times \ell \times h=(24-2x)(18-2x)x=(4x^2-84x+432)x=4x^3-84x^2+432x$ CQFD

2. $V'(x)=12x^2-168x+432$

3. Pour V', on a $\Delta=7488$ avec $\sqrt{7488}=\sqrt{64\times 9\times 13}=24\sqrt{13}$
Donc $x_1=\frac{168+24\sqrt{13}}{24}=7+\sqrt{13}\simeq 10{,}6$ et $x_2=7-\sqrt{13}\simeq 3{,}4$ et positive à l'extérieur des racines
On a alors

x	0		$7-\sqrt{13}$		9
$V'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\simeq 655$	$\searrow$	0

On va vous épargner le calcul de la valeur exacte : $V(7-\sqrt{13})=4\times(7-\sqrt{13})^3-84\times(7-\sqrt{13})^2+432\times(7-\sqrt{13})$
Mais pour avoir une valeur approchée la plus exacte possible, calculer avec plusieurs chiffres significatifs
Par ex : $7-\sqrt{13}\simeq 3{,}3944$ Alors $V\left(7-\sqrt{13}\right)\simeq 654{,}97$

4. La contenance de la boîte est maximale pour $x=7-\sqrt{13}$ soit environ 3,4 cm

5. Oui, le volume **maximal**, d'après le tableau de variation, est **d'environ 655 cm^3**, une contenance dont légèrement supérieure à 650 cm^3

Corrigé Exercice 14

1. $g'(x)=e^x-1$

2. On cherche à résoudre $e^x-1\geq 0 \Leftrightarrow e^x\geq 1 \Leftrightarrow e^x\geq e^0$
Comme l'exponentielle est strictement croissante, cela revient à dire que $x\geq 0$
On a donc

x	-5		0		5
$g'(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$g(x)$	$e^{-5}+6$	$\searrow$	2	$\nearrow$	e^5-4

Avec $g(-5)=e^{-5}-(-5)+1=e^{-5}+6\simeq 6$; $g(0)=e^0-0+1=1+1=2$
et $g(5)=e^5-5+1=e^5-4\simeq 144$

3. Pour $x\in[-5\,;\,5]$, le minimum de g est 2 on a donc pour tout $x\in[-5\,;\,5]$, $g(x)\geq 2>0$
La fonction g est bien strictement positive sur $[-5;5]$
4.

x	-5		5
e^x		$+$	
$g(x)$		$+$	
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-4-5e^5$	$\nearrow$	$6+5e^{-5}$

Avec $f(-5)=-5+1-\frac{5}{e^{-5}}=-4-5e^5\simeq -746$ et $f(5)=5+1+\frac{5}{e^5}=6+5e^{-5}\simeq 6$