Corrections Savoir Sr. 3

Corrigé Exercice 5

1) « $S_{p+1} = \frac{3(p+1)(p+3)}{p}$ »

2) « $u_{p+1} = \frac{2^{p+2}}{3^{2p+2}}$ »

3) « $1 + q + q^2 + \cdots + q^p + q^{p+1} = \frac{1-q^{p+2}}{1-q}$ »

Un peu plus…

4) « $T_{p+1} = (2p+1)(p+4)$ »

5) « $v_0 + v_1 + \cdots + v_{p-1} + v_p = 3p + 1$ »

Corrigé Exercice 6

1) *<u>Init.</u>* : Pour $n = 1$, on a $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = 1$ et $n^2 = 1^2 = 1$. La propriété est vraie au rang 1

<u>Hérédité</u> : Si pour $n = p$, l'égalité est vraie, alors on a : $1 + 3 + 5 + \cdots + (2p-1) = p^2$

Alors pour $n = p + 1$:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \mathbf{1 + 3 + 5 + \cdots + (2p-1)} + (2(p+1)-1)$$
$$= \boldsymbol{p^2} + (2(p+1)-1) = p^2 + 2p + 1$$

Et : $n^2 = (p+1)^2 = p^2 + 2p + 1$

Alors a propriété est vérifiée pour $n = p + 1$.

***<u>Conclusion</u>* : Pour tout nombre entier $n > 0$, on a bien** $\mathbf{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2}$

2) a. $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$ *et* $C_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$

b. *<u>Initialisation</u>* : Pour $n = 1$, on a $S_n = S_1 = 1$ et $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$. La propriété est vraie au rang 1

<u>Hérédité</u> : Si pour $n = p$ l'égalité est vraie alors on a : $S_p = \frac{p(p+1)}{2}$

Alors pour $n = p + 1$, on a :

$$S_n = S_{p+1} = S_p + (p+1) = \frac{p(p+1)}{2} + p + 1 = \frac{p(p+1)+2(p+1)}{2} = \frac{p^2+3p+2}{2}$$

Et : $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(p+1)(p+2)}{2} = \frac{p^2+3p+2}{2}$

Alors la propriété est vraie au rang $p + 1$.

***<u>Conclusion</u>* : Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on a bien** $\mathbf{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$

c. $C_1 = 1$; $C_2 = 1 + 4 = 5$; $C_3 = 5 + 9 = 14$; $C_4 = 14 + 16 = 30$ *et* $C_5 = 30 + 25 = 55$

Difficile de trouver une formule générale à partir de ces résultats…

d. *<u>Initialisation</u>* : Pour $n = 1$, on a $C_1 = 1$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1\times2\times3}{6} = \frac{6}{6} = 1$. La propriété est vraie au rang 1

<u>Hérédité</u> : Si pour $n = p$ l'égalité est vraie alors on a : $C_p = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$

Alors pour $n = p + 1$: $C_n = C_{p+1} = C_p + (p+1)^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)+6(p+1)^2}{6} = \frac{(p^2+p)(2p+1)+6(p^2+2p+1)}{6} = \frac{2p^3+9p^2+13p+6}{6}$

Et : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6} = \frac{(p^2+3p+2)(2p+3)}{6} = \frac{2p^3+9p^2+13p+6}{6}$

Alors la propriété est vérifiée pour $n = p + 1$.

***<u>Conclusion</u>* : Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on a bien** $\mathbf{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Corrigé Exercice 6 Fin

3) **Initialisation** : Pour $n = 0$, $S_n = v_0 = 2$ et $(n+1)(n+2) = 1 \times 2 = 2$. la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Si pour $n = p$ l'égalité est vraie alors on a : $S_p = (p+1)(p+2)$. Alors pour $n = p+1$:

$$S_n = S_{p+1} = S_p + v_{p+1} = S_p + 2(p+1) + 2 = S_p + 2(p+2)$$
$$= (p+1)(p+2) + 2(p+2) = (p+2)\big((p+1)+2\big) = (p+2)(p+3) \quad (\text{ou } p^2 + 5p + 6)$$

Et : $(n+1)(n+2) = (p+2)(p+3)$ (ou $p^2 + 5p + 6$) Alors la propriété est vraie pour $n = p+1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n, on a $S_n = (n+1)(n+2)$

Un peu plus…

__Initialisation__ : Pour $n = 0$, on a $\sum_{i=0}^{n} x^i = x^0 = 1$ d'une part et $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{0+1}}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1$ d'autre part

La propriété est vraie au rang 1

__Hypothèse de récurrence__ : On suppose que, pour un entier p, on a : $\sum_{i=0}^{p} x^i = \frac{1-x^{p+1}}{1-x}$

__Hérédité__ : : $\sum_{i=0}^{p+1} x^i = \sum_{i=0}^{p} x^i + x^{p+1} = \frac{1-x^{p+1}}{1-x} + x^{p+1}$ d'après l'hypothèse de récurrence

on a alors : $\sum_{i=0}^{p+1} x^i = \frac{1-x^{p+1}+x^{p+1}(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{p+1}+x^{p+1}-x^{p+2}}{1-x} = \frac{1-x^{p+2}}{1-x}$

La propriété est vérifiée au rang $p+1$, elle est donc héréditaire

__Conclusion__ **: Pour tout nombre entier n, on a bien** $\boldsymbol{1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$

Corrigé Exercice 7

a. $d_4 = 2$, $d_5 = 5$, $d_6 = 9$ et $d_7 = 14$

b. Il y en a **4 de plus** : les 3 qui relient F aux points de ABCDE qui ne lui sont pas adjacents (donc ni A, ni E) plus celle qui relie maintenant les 2 points qui lui sont adjacents (A et E)

c. On peut généraliser, pour passer d'un polygone à n côtés à un polygone à $(n+1)$ côtés, le nouveau point est donc reliés à chacun des points qui ne lui sont pas adjacents, donc aux $(n-2)$ autres points, et il y a la nouvelle diagonale constituée par les deux points qui encadrent le nouveau.

Donc : $d_{n+1} = d_n + (n-2) + 1 = \boldsymbol{d_n + n - 1}$

d. *__Init.__* : Pour $n = 4$, on a $\frac{4(4-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2 = d_2$ La propriété est vraie au rang 4

__H. de R.__ : On suppose que, pour un entier p, on a : $d_p = \frac{p(p-3)}{2}$

__Hrd.__ : $d_{p+1} = d_p + p - 1 = \frac{p(p-3)}{2} + p - 1$ d'après l'hypothèse de récurrence,

on a alors : $d_{p+1} = \frac{p(p-3)+2(p-2)}{2} = \frac{p^2-p-4}{2}$ avec $\Delta = 9$, $p_1 = 2$ et $p_2 = -1$

$d_{p+1} = \frac{(p+1)(p-2)}{2}$ La propriété est vérifiée au rang $p+1$, elle est donc héréditaire

__Ccl__ **: Pour tout nombre entier $n \geq 4$, on a bien** $\boldsymbol{d_n = \frac{n(n-3)}{2}}$

Corrigé Exercice 8

● On cherche à démontrer, pour tout $n \geq 1$, que $(n+1)^2 + (n-1)^2 = kn$ où k est un entier
On peut évidemment procéder par récurrence, mais ce n'est pas du tout nécessaire ici… un calcul très rapide permet de démontrer directement
$(n+1)^2 + (n-1)^2 = n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1) = 2n + 2n = 4n$ ce qui finit la démonstration

<u>Moralité</u> : Même s'il est fréquent que « Démontrer pour tout entier n » implique de faire un raisonnement par récurrence, ce n'est pas systématique !!! Parfois on peut essayer autrement

● **a.** en supposant que pour un entier p il existe un entier k tel que $10^p - 1 = 9k \Leftrightarrow 10^p = 9k + 1$
On a $10^{p+1} = 10 \times 10^p = 10(9k+1) = 90k + 10 = 90k + 9 + 1 = 9(10k+1) + 1 = 9k' + 1$
La propriété est bien héréditaire
(par contre, elle est fausse pour $n = 0$, et vraie pour $n = 1$, donc elle ne sera vraie que pour $n \geq 1$)

● **1.** **Faux**, elle sera assurément vraie pour $n \geq 4$, mais il faudrait initialiser pour $n = 2$ pour pouvoir conclure

2. **Faux**, on ne peut même pas savoir si elle sera vraie pour un nombre quelconque
(par contre, si elle est vraie pour un nombre $n_0 \geq 4$, alors on pourra conclure qu'elle est vraie à partir de n_0)

3. **Vrai :** *<u>Init.</u>* : Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1$ La propriété est vraie au rang 1

<u>H. de R.</u> : On suppose que, pour un entier p, on a : $u_p = 1$

<u>Hrd.</u> : $u_{p+1} = {u_p}^2 = 1^2 = 1$ La propriété est vérifiée au rang $p+1$, elle est donc héréditaire

<u>Ccl</u> **: Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on a bien $u_n = 1$**