

Sujet n°2 : Corrections

Corrigé sujet 2 - Exercice 1

1. $p_{G_1}(D_2) = 0,8$

2. $\Rightarrow$

3. $g_2 = p(G_2) = p(G_1 \cap G_2) + p(D_1 \cap G_2) = 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 = 0,45$
Elle a 45% de chances de gagner la 2^e partie

4. a. $\Rightarrow$

b. $g_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(D_n \cap G_{n+1})$
 $= g_n \times 0,7 + (1 - g_n) \times 0,2 = 0,7g_n - 0,2g_n + 0,2$
 $= 0,5g_n + 0,2 \quad \text{CQFD}$

5. a. Initialisation :

Pour $n = 1$, on a $g_1 = 0,5$ et $0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 = 0,1 \times 1 + 0,4 = 0,5$
L'égalité est vraie au rang 1

Hérédité : Pour un p entier, on suppose que $g_p = 0,1 \times 0,5^{p-1} + 0,4$

On a $g_{p+1} = 0,5g_p + 0,2 = 0,5(0,1 \times 0,5^{p-1} + 0,4) + 0,2$
 $= 0,1 \times 0,5^p + 0,2 + 0,2 = 0,1 \times 0,5^p + 0,4$

L'égalité est vraie pour $p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a bien : $g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$

6. $g_{n+1} - g_n = 0,1 \times 0,5^{n+1-1} + 0,4 - (0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4) = 0,1 \times 0,5^n + 0,4 - 0,1 \times 0,5^{n-1} - 0,4$
 $= 0,1 \times 0,5^n - 0,1 \times 0,5^{n-1} = 0,1 \times 0,5^{n-1}(0,5 - 1) = -0,1 \times 0,5 \times 0,5^{n-1} = -0,1 \times 0,5^n$

On a donc $g_{n+1} - g_n < 0 \Leftrightarrow g_{n+1} < g_n$

La suite (g_n) est décroissante

7. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ car $-1 < 0,5 < 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1 \times 0,5^{n-1} = 0$ et par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = 0,4$

Au bout d'un très grand nombre de parties, sa probabilité de gagner va se stabiliser autour de 40 %.

8. $g_n - 0,4 \leq 0,001 \Leftrightarrow 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 - 0,4 \leq 0,001$
 $\Leftrightarrow 0,5^{n-1} \leq \frac{0,001}{0,1} \Leftrightarrow \ln(0,5^{n-1}) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow (n-1) \ln(0,5) \leq \ln(0,01)$

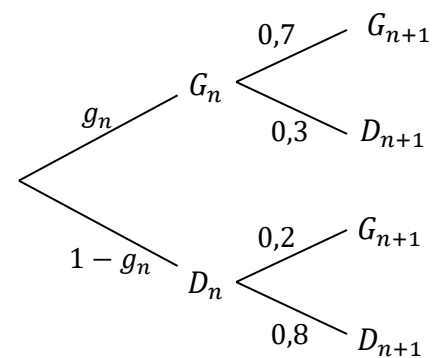
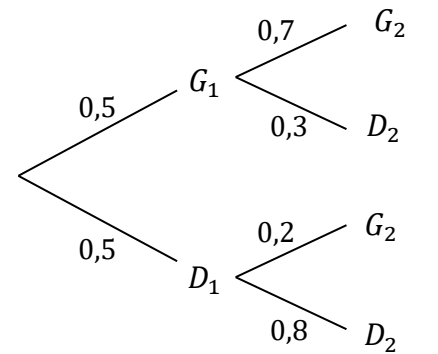
Comme $\ln(0,5) < 0$, $\Leftrightarrow n-1 \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1$ et on a $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1 \simeq 7,6$

n est entier, donc $n \geq 8$

9. While $g > 0,4 + e$:

$g = 0,5g + 0,2$

$n = n + 1$



Corrigé sujet 2 - Exercice 2

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{1}{3}$ mais $\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{3}{-1} = -3 \neq \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés

2. a. On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times (-2) = 1 + 9 - 10 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 - 3 + 0 = 0$

Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs directeurs, il est donc normal au plan (ABC) .

b. Le plan (ABC) a une équation cartésienne du type : $x + 3y + 5z + k = 0$.

Comme $A \in (ABC)$, on a $x_A + 3y_A + 5z_A + k = 0 \Leftrightarrow -2 + 10 + k = 0 \Leftrightarrow k = -8$

On a bien pour équation cartésienne du plan (ABC) : $x + 3y + 5z - 8 = 0$

c. Testons si le point D appartient au plan (ABC) : $x_D + 3y_D + 5z_D - 8 = 0 + 0 + 15 - 8 = 7 \neq 0$

Donc le point D n'appartient pas au plan (ABC) et les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires

3. a. Il s'agit de montrer que la droite $\mathcal{D}_1$ est orthogonale au plan (ABC) et passe par le point D

Or la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ passe par le point $(0; 0; 3)$ (pour $t = 0$)

c'est-à-dire le point D et a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ qui est le vecteur normal au plan (ABC)

Donc la droite $\mathcal{D}_1$ est bien la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D .

b. On résout le système : $\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3t = -1 - 5s \\ 3 + 5t = 2 - 6s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3(1 + 3s) = -1 - 5s \\ 3 + 5(1 + 3s) = 2 - 6s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3 + 9s = -1 - 5s \\ 3 + 5 + 15s = 2 - 6s \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 3 \times \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{1}{7} \\ s = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7} \\ s = -\frac{6}{21} = -\frac{2}{7} \end{cases}$ Le système a une solution : les droites sont sécantes

Pour les coordonnées du point d'intersection, on calcule par exemple : $\begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ y = 3 \times \frac{1}{7} \\ z = 3 + 5 \times \frac{1}{7} = \frac{26}{7} \end{cases}$

Le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{7}; \frac{3}{7}; \frac{26}{7}\right)$

4. a. Le projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC) est le point d'intersection de la hauteur $\mathcal{D}_1$ avec le plan (ABC) . Donc on résout le système :

$\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ x + 3y + 5z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ t + 9t + 15 + 25t - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \\ 35t + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = 3 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \\ z = 3 + 5 \times \left(-\frac{1}{5}\right) \\ t = -\frac{7}{35} = -\frac{1}{5} \end{cases}$

On a les coordonnées $H \left(-\frac{1}{5}; -\frac{3}{5}; 2\right)$

b. La distance du point D au plan (ABC) est la longueur DH

$DH = \sqrt{\left(-\frac{1}{5} - 0\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} - 0\right)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25} + 1} = \sqrt{\frac{35}{25}} = \frac{\sqrt{35}}{5} \simeq 1,18$

Corrigé sujet 2 - Exercice 3

1. On a $g'(x) = 2 - 2x$

La fonction g est bien strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$
et on a $g(0) = 0$ et de $g(1) = 1$.

x	0	1
$g'(x)$	+	0
$g(x)$	0 ↗	1

2. $u_1 = g(u_0) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et $u_2 = g\left(\frac{3}{4}\right) = 2 \times \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} - \frac{9}{16} = \frac{15}{16}$

3. Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ et $u_1 = \frac{3}{4}$ avec $0 < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$
donc on a bien $0 < u_0 < u_1 < 1$: la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : Pour un p entier, on suppose que $0 < u_p < u_{p+1} < 1$
Comme la fonction g est croissante, on a $g(0) < g(u_p) < g(u_{p+1}) < g(1)$.
Et donc $0 < u_{p+1} < u_{p+2} < 1$ La propriété est vraie pour $p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a bien : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4. On a $u_n < u_{n+1}$ donc la suite est croissante et $u_n < 1$: elle est donc majorée
D'après le théorème des suites monotones bornées, la suite (u_n) est donc bien convergente.

5. Si on pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ alors on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ et comme $u_{n+1} = g(u_n)$, par composition des limites, on a $g(\ell) = \ell \Leftrightarrow 2\ell - \ell^2 = \ell \Leftrightarrow \ell - \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell(1 - \ell) = 0 \Leftrightarrow$ soit $\ell = 0$ soit $\ell = 1$
La solution $\ell = 0$ est impossible, car la suite est croissante et $u_0 > 0$
On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

6. On cherche à montrer que, pour tout entier n , on a $v_{n+1} = 2v_n$
On a d'une part $v_{n+1} = \ln(1 - u_{n+1}) = \ln(1 - (2u_n - u_n^2)) = \ln(1 - 2u_n + u_n^2)$
Et d'autre part $2v_n = 2\ln(1 - u_n) = \ln((1 - u_n)^2) = \ln(1 - 2u_n + u_n^2)$
Donc on a bien $v_{n+1} = 2v_n$ et la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2
Son premier terme est : $v_0 = \ln(1 - u_0) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

7. $v_n = v_0 \times 2^n = -\ln 2 \times 2^n$

8. Comme $v_n = \ln(1 - u_n)$, on a $e^{v_n} = 1 - u_n \Leftrightarrow u_n = 1 - e^{v_n} = 1 - e^{-\ln(2) \times 2^n}$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$ Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln 2 \times 2^n = -\infty$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = 0$ donc par composée de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\ln(2) \times 2^n} = 0$

Au final, par somme de limites, on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

9. $n = n + 1$
 $u = 2u - u^2$

Corrigé sujet 2 - Exercice 4

Partie A :

1. b. $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}$ CQFD

c.

x	0	$+\infty$
$2x+1$		+
$2x$	0	+
$f'(x)$	0	+
$f(x)$		$\nearrow$

d. On a $f''(x) = \frac{2 \times 2x - (2x+1) \times 2}{(2x)^2} = \frac{4x - 4x - 2}{4x^2} = -\frac{2}{4x^2} = -\frac{1}{2x^2}$

On a donc f'' qui est strictement négative sur $]0; +\infty[$: la fonction f est concave sur $]0; +\infty[$

2. a. On a $f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2} \ln 1 = -1$ et $f(2) = 2 - 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2$

f est continue et strictement croissante sur $[1; 2]$ et on a $f(1) < 0 < f(2)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1; 2]$

b. On a alors :

x	0	α	$+\infty$
$f(x)$		-	0

c. $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 2 + \frac{1}{2} \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \alpha = -\alpha + 2 \Leftrightarrow \ln(\alpha) = 2(-\alpha + 2)$ CQFD

Partie B

1. $g'(x) = -\frac{7}{8} \times 2x + 1 - \frac{1}{4} \times 2x \ln x - \frac{1}{4} x^2 \times \frac{1}{x} = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x - \frac{1}{4}x = -2x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x$

On a $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{2} \ln x$

Donc $xf\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{2} \ln x\right) = \frac{x}{x} - 2x - \frac{1}{2}x \ln x = 1 - 2x - \frac{1}{2}x \ln x = g'(x)$ CQFD

2. a. Pour un $x > 0$ l'inégalité $x < \frac{1}{\alpha}$ revient, en passant à l'inverse, à $\frac{1}{x} > \alpha$

Or, pour $X > \alpha$, on a $f(X) > 0$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$

b. $g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{7}{8\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2} \ln \alpha$ et $g(1) = -\frac{7}{8} + 1 = \frac{1}{8}$.

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
$f\left(\frac{1}{x}\right)$		+	0
x	0	+	
$g'(x)$		+	0
$g(x)$		$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

Partie C

1. $g(x) - y = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2 \ln x$

On a pour tout $x \in]0; 1]$ à la fois $-\frac{1}{4}x^2 \leq 0$ et $\ln x \leq 0$ donc, par

produit : $g(x) - y \geq 0$ et $g(x) \geq y$

La courbe $\mathcal{C}_g$ est bien au dessus de la parabole $\mathcal{P}$