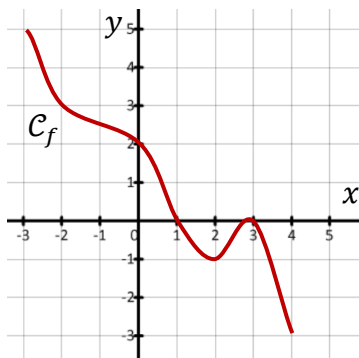


3. Fonctions et calcul littéral

● Rappel express

Images et antécédents



- L'image de -2 est 3
 $f(-2) = 3$
 Pour $x = -2$ on a $y = 3$

- L'équation $f(x) = 3$
 a pour solution $S = \{-2\}$
 Pour $y = 3$ on a $x = -2$

- L'image de 1 est 0
 $f(1) = 0$
 Pour $x = 1$ on a $y = 0$

- L'équation $f(x) = 0$
 a pour solution $S = \{1; 3\}$
 Pour $y = 0$ on a $x = 1$ ou $x = 2$

Signe et sens de variation

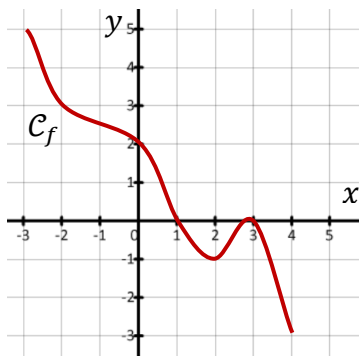


Tableau de signe \Rightarrow C'est au-dessus ou en dessous de l'axe des x ?

x	-3	1	3	4
$f(x)$	+	0	-	0

Tableau de variation \Rightarrow ça monte ou ça descend ?

x	-3	2	3	4
$f(x)$	5	\searrow	\nearrow	\searrow
		-1	0	-3

Fonctions affines

$f(x) = ax + b$

$a < 0 \Rightarrow$ fonction décroissante \searrow

$a > 0 \Rightarrow$ fonction croissante \nearrow

Résoudre $ax + b = 0$

$\Leftrightarrow ax = -b$

$\Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	+	0	-

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	-	0	+

Dérivée :

$f(x) = \text{constante} \Rightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

x	$-\infty$	c	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\nearrow	\searrow	

✓ Exercice 1

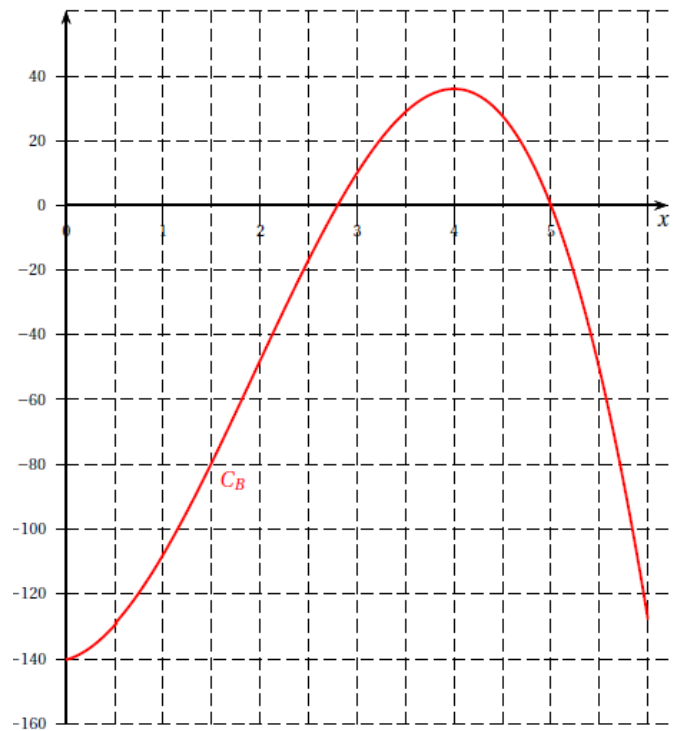
Une entreprise produit et vend chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile.
Chaque mois, cette entreprise vend entre 0 et 600 pièces.

Le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé pour x centaines de pièces vendues, est donné par la fonction B définie sur l'intervalle $[0; 6]$ dont la courbe représentative C_B est donnée ci-contre.

1. Donner par lecture graphique, avec la précision permise par le graphique, l'intervalle pour lequel le bénéfice est positif ou nul.

On admet que la fonction B est définie sur $[0; 6]$ par :

$$B(x) = -5x^3 + 29x^2 + 8x - 140.$$



2. Déterminer l'expression de la fonction dérivée B' de B sur $[0; 6]$.

3. Montrer que, pour tout x de $[0; 6]$, $B'(x)$ peut s'écrire $B'(x) = (-15x - 2)(x - 4)$.

4. Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de B sur $[0; 6]$.

Compléter le tableau de variation à l'aide du tableau de valeurs ci-dessous, obtenu à la calculatrice.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$B(x)$	-140	-129,375	-108	-79,625	-48	-16,875	10	28,875	36	27,625	0	-50,625	-128

5. Quel est le nombre de pièces à produire et à vendre afin que le bénéfice soit maximal.

Donner la valeur exacte de ce bénéfice maximal en milliers d'euros.

✓ Exercice 2

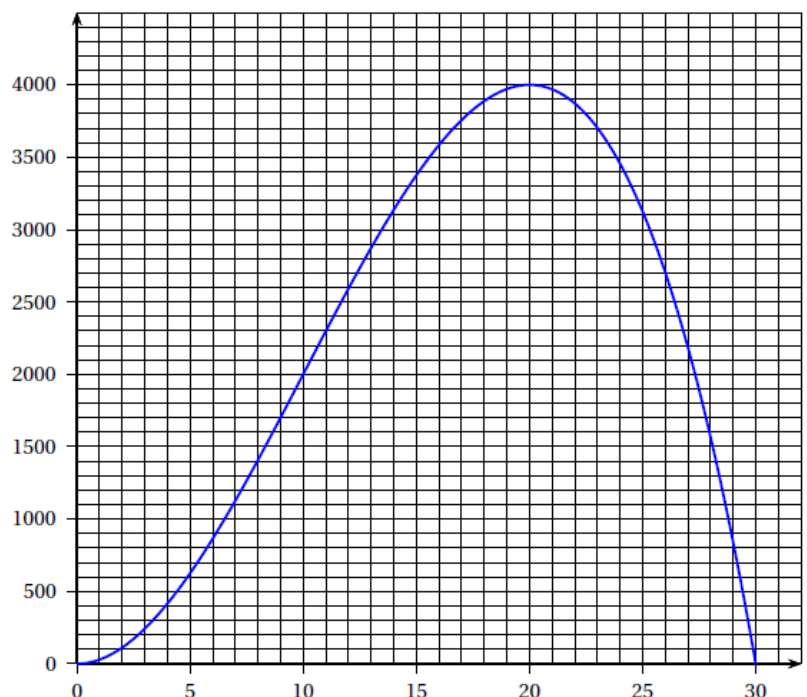
Une épidémie a frappé les habitants d'une ville.

La courbe ci-contre, notée C , représente le nombre de personnes malades au cours du temps exprimé en jours, sur une période de 30 jours.

1. On répondra aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

a. Déterminer le nombre de malades le cinquième jour.

b. Sur quel(s) intervalle(s) de temps, le nombre de malades est-il inférieur ou égale à 25 % de son maximum?



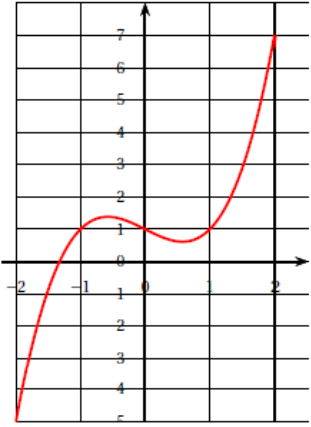
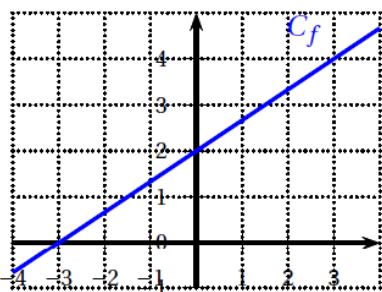
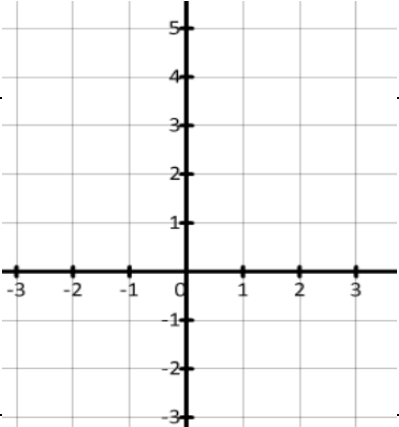
2. On modélise le nombre de personnes malades en fonction du temps t , exprimé en jours, à l'aide de la fonction f définie sur $[0; 30]$ par :

$$f(t) = -t^3 + 30t^2$$

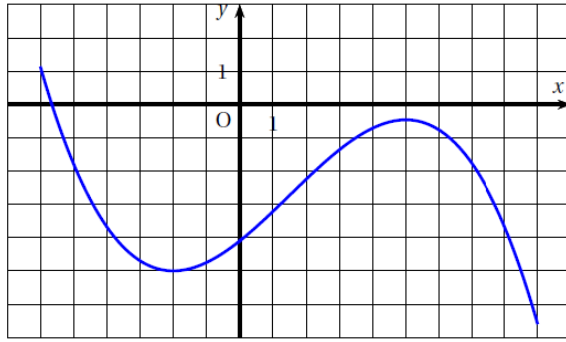
- On admet que la fonction f est dérivable sur $[0; 30]$ et on désigne par f' sa dérivée.
Montrer que $f'(t) = 3t(20 - t)$.
- En déduire le tableau de variations de f sur $[0; 30]$.
- Calculer $f(20)$ et interpréter le résultat dans le contexte.

✓ Automatismes

1^{ère} partie : En réponses à donner.

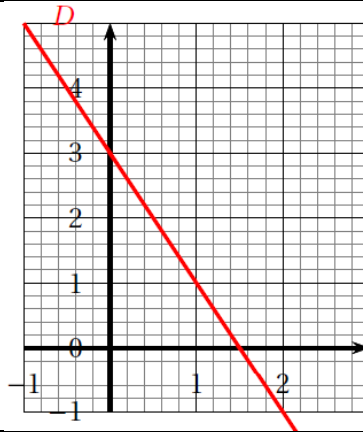
<p>1) Donner le tableau de signes de la fonction $f(x) = 2x - 9$</p>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%; text-align: center;">x</td> <td style="width: 35%; text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$f(x)$</td> <td colspan="2"></td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$f(x)$		
x	$-\infty$	$+\infty$					
$f(x)$							
<p>2) \mathcal{C} est la courbe représentative d'une fonction g définie sur $[-2; 2]$. Compléter par lecture graphique.</p> <p>a. L'image de 0 par g est</p> <p>b. L'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 1$ est</p>	 <p>a.</p> <p>b.</p>						
<p>3) Dresser ci-contre le tableau de signe de la fonction définie sur $[-2; 6]$ par :</p> $h(x) = \frac{x}{2} - 4.$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%; text-align: center;">x</td> <td style="width: 35%; text-align: center;">-2</td> <td style="width: 50%; text-align: center;">6</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$h(x)$</td> <td colspan="2"></td> </tr> </table>	x	-2	6	$h(x)$		
x	-2	6					
$h(x)$							
<p>4) Soit la fonction affine f de représentation graphique \mathcal{C}_f donnée ci-contre :</p> <p>On a $f(x) = 3$ pour $x \approx \dots$</p>	<p style="text-align: center;">$x \approx \dots$</p> 						
<p>5) Tracer ci-contre la fonction : $g(x) = -2x + 3$.</p>							

6) La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction h définie sur l'intervalle $[-6 ; 9]$.



Donner les intervalles sur lesquels la fonction h est décroissante

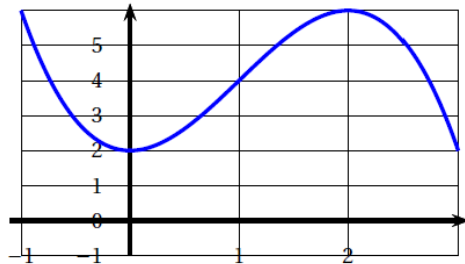
7) Déterminer, avec la précision permise par le graphique, l'expression de la fonction f représentée par la droite ci-contre :



8) Cette courbe représente une fonction g définie sur l'intervalle $[-1 ; 3]$.

Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :

$$g(x) = 2$$



9) Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par :

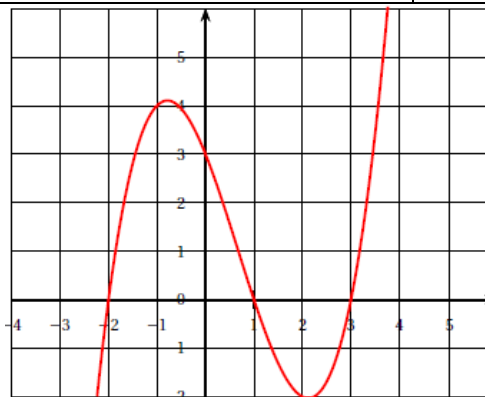
$$h(x) = (-x + 1)(-2x + 4).$$

Déterminer le tableau de signe de $h(x)$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$-x + 1$		
$-2x + 4$		
$h(x)$		

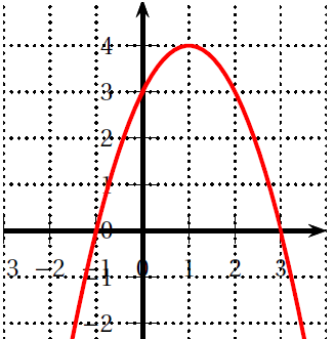
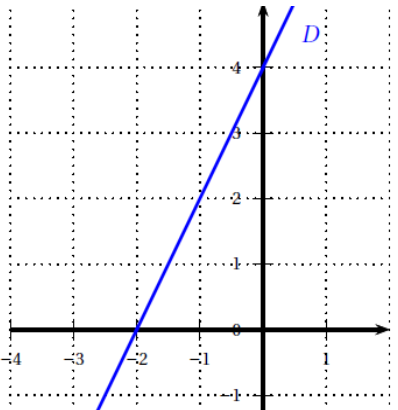
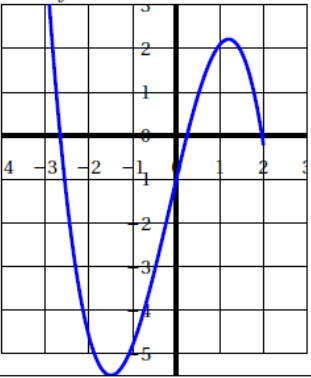
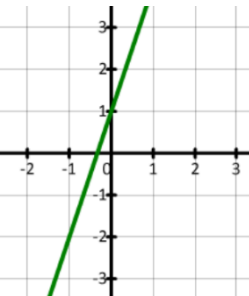
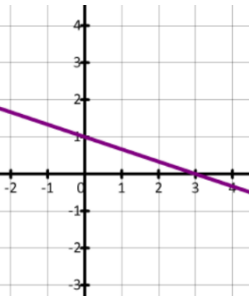
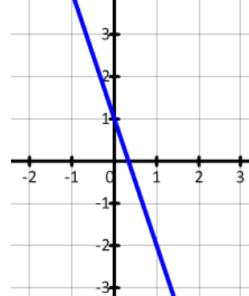
10) Sur le graphique suivant, on a représenté la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2 ; 3]$.

Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-2 ; 3]$.

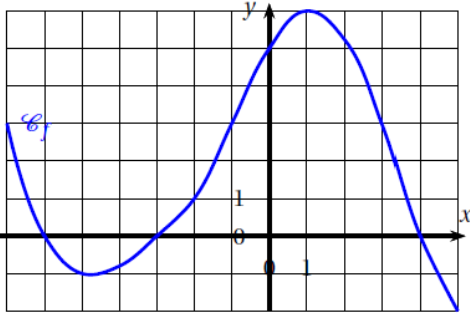


x	-2	3
$f(x)$		

2^{ème} partie. En QCM, une seule réponse juste.

<p>1) Le tableau de signes de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x - 8$ est :</p>	<p style="text-align: center;">A.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$-$</td> <td>0</td> <td>$+$</td> </tr> </table>		x	$-\infty$	2	$+\infty$	$f(x)$	$-$	0	$+$	<p style="text-align: center;">B.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$+$</td> <td>0</td> <td>$-$</td> </tr> </table>		x	$-\infty$	2	$+\infty$	$f(x)$	$+$	0	$-$
x	$-\infty$	2	$+\infty$																	
$f(x)$	$-$	0	$+$																	
x	$-\infty$	2	$+\infty$																	
$f(x)$	$+$	0	$-$																	
<p>2) On considère la courbe représentative de la fonction g définie sur \mathbb{R}.</p> <p>L'image de -1 par g est :</p> 	<p style="text-align: center;">A. $-1,2$</p>	<p style="text-align: center;">B. 0</p>	<p style="text-align: center;">C. 4</p>	<p style="text-align: center;">D. $-0,8$</p>																
<p>3) La droite D est la courbe d'une fonction h définie sur \mathbb{R}.</p> <p>Quelle est l'expression de h ?</p> 	<p style="text-align: center;">A. $h(x) = -2x + 4$</p>		<p style="text-align: center;">B. $h(x) = 4x - 2$</p>																	
 <p>4) On donne la courbe C d'une fonction f définie sur $[-3 ; 2]$.</p> <p>L'équation $f(x) = 0$ admet :</p>	<p style="text-align: center;">A. Une solution négative</p>	<p style="text-align: center;">B. Deux solutions positives</p>	<p style="text-align: center;">C. Deux solutions négatives</p>	<p style="text-align: center;">D. Deux solutions positives et une solution négative</p>																
<p>5) On définit la fonction</p> $g(x) = -\frac{1}{3}x + 1$ <p>À quelle droite correspond sa représentation graphique :</p>	<p style="text-align: center;">A.</p> 	<p style="text-align: center;">B.</p> 	<p style="text-align: center;">C.</p> 																	

6) \mathcal{C}_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-7 ; 5]$.



Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation : $f(x) \leq 0$

A. $[-6; -3]$

B. $[-7; -5]$

C. $[-7; -5]$ et $[6; 5]$

D. $[-6; -3] \cup [4; 5]$

7) Soit la fonction g définie par l'expression :

$$g(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$$

La dérivée de g est donnée par l'expression :

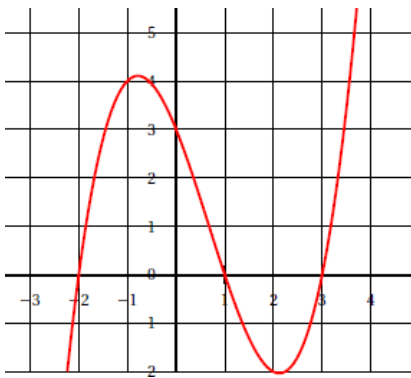
A. $g'(x) = 9x^2 - 4x - 1$

B. $g'(x) = 6x^2 - 4x - 3x$

C. $g'(x) = 6x^2 - 4x - 3$

D. $g'(x) = 9x^2 - 4x - 3$

8) Sur le graphique suivant, on a représenté la courbe représentative d'une fonction h



Quel est le tableau de signe de la fonction h sur $[-2 ; 3]$?

A.

x	-2	-0,8	2	3	
$h(x)$	+	0	-	0	+

B.

x	-2	1	3		
$h(x)$	0	+	0	-	0

C.

x	-2	1	2	3	
$h(x)$	+	0	-	0	+

9) La courbe \mathcal{C} est la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^2 - x$.

Un point $A(-2; y)$ appartient à la courbe \mathcal{C} .
Quelle est l'ordonnée y de A ?

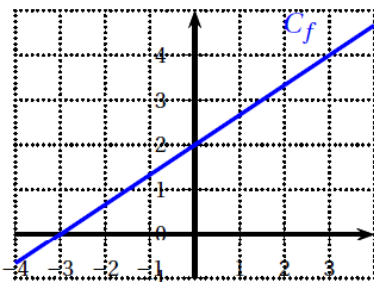
A. $y = -6$

B. $y = -2$

C. $y = 2$

D. $y = 6$

10) Soit la fonction affine f de représentation graphique \mathcal{C}_f donnée ci-contre :



L'expression de f est :

A.

$$f(x) = -3 + 2x$$

B.

$$f(x) = -3x + 2$$

C.

$$f(x) = \frac{3}{2}x + 2$$

D.

$$f(x) = 2 + \frac{2}{3}x$$

3. CORRECTIONS

✓ Corrigé Exercice 1

1. Le bénéfice est positif ou nul sur l'intervalle $[2, 75 ; 5]$: c'est-à-dire entre 275 et 500 pièces.

2. $B'(x) = -5 \times 3x^2 + 29 \times 2x + 8 \times 1 - 0 = -15x^2 + 58x + 8$

3. $(-15x - 2)(x - 4) = -15x^2 + 60x - 2x + 8 = -15x^2 + 58x + 8 = B'(x)$ CQFD

4. On a :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{15}$	0	4	6	$+\infty$
$-15x - 2$	+	0	-		-	
$x - 4$	-		-	0	+	
$B'(x)$	-	0	+	0	-	

Donc sur $[0 ; 6]$

x	0	4	6
$-15x - 2$		-	
$x - 4$		-	0
$B'(x)$		+	0
$B(x)$	-140	↗	36
			↘
			-128

5. Le maximum est $B(4) = 36$

Il faut produire et vendre 400 pièces pour faire un bénéfice maximal de 36 000 €

✓ Corrigé Exercice 2

1. a. Il y a environ **600 malades** le 5^{ème} jour.

b. Le maximum est 4 000 malades

25 % de 4000 (c'est un quart de 4000) fait 1 000 malades.

Il y a moins de 1 000 malades entre **le début et le 6^{ème} jour** puis à partir du **29^{ème} jour au 30^{ème}**.

2. a. On calcule : $f'(t) = -3t^2 + 30 \times 2t = -3t^2 + 60t$

Et on a bien $3t(20 - t) = 60t - 3t^2 = f'(t)$.

b. On a :

t	$-\infty$	0	20	30	$+\infty$
$3t$	-	0	+		+
$20 - t$	+		+	0	-
$f'(t)$	-	0	+	0	-

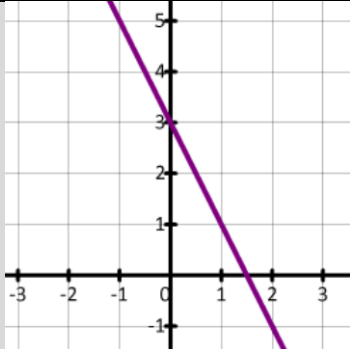
Donc sur $[0 ; 6]$

t	0	20	30
$3t$	+		+
$20 - t$	+	0	-
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	\nearrow 4 000 \searrow	0

c. $f(20) = -20^3 + 30 \times 20^2 = -8\,000 + 30 \times 400 = -8\,000 + 12\,000 = 4\,000$
 Au maximum de l'épidémie, au 20^{ème} jour, il y aura 4 000 malades

✓ Corrigé Automatismes

1^{ère} partie CORRIGÉ

<p>1) $f(x) = 2x - 9 \Rightarrow a = 2$ donc croissante \nearrow^+ Et $2x - 9 = 0 \Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$</p>	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$\frac{9}{2}$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$	$f(x)$	-	0	+										
x	$-\infty$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$																
$f(x)$	-	0	+																
<p>2) a. Pour $x = 0$ on a $y = 1$ b. on cherche les x des points à hauteur $y = 1$ on a $g(-1) = 1 ; g(0) = 1$ et $g(1) = 1$</p>	<p>a. $g(0) = 1$ L'image est 1 b. $S = \{-1; 0; 1\}$</p>																		
<p>3) $h(x) = \frac{x}{2} - 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ donc croissante \nearrow^+ Et $\frac{x}{2} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 4 \Leftrightarrow x = 4 \times 2 = 8 \Rightarrow$</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>-2</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$h(x)$</td> <td></td> <td>-</td> <td></td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-2	6	8	$+\infty$	$h(x)$		-		0	+	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>$h(x)$</td> <td colspan="2">-</td> </tr> </table>	x	-2	6	$h(x)$	-	
x	$-\infty$	-2	6	8	$+\infty$														
$h(x)$		-		0	+														
x	-2	6																	
$h(x)$	-																		
<p>4) On cherche x pour $y = 3$</p>	<p style="text-align: center;">$x \simeq 4$</p>																		
<p>5) Avec 2 ou 3 points par exemple :</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>-1</td> </tr> </table>	x	0	1	2	$g(x)$	3	1	-1											
x	0	1	2																
$g(x)$	3	1	-1																
<p>6) Donner les x pour lesquels la courbe descend</p>	<p style="text-align: center;">$[-6; -2]$ puis $[5; 9]$</p>																		
<p>7) L'ordonnée à l'origine est $b = 3$ Le coefficient directeur est : $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{1} = -2$</p>	<p style="text-align: center;">$f(x) = 3 - 2x$</p>																		

<p>8) On cherche les x pour lesquels $y = 2$ On a $g(0) = 2$ et $g(3) = 2$</p>	$S = \{0; 3\}$																					
<p>9) Pour $-x + 1$ on a $a = -1$ donc $+\searrow-$ Et $-x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$</p> <p>Pour $-2x + 4$ on a $a = -2$ donc $+\searrow-$ Et $-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} = 2$</p>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$-x + 1$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>$-2x + 4$</td> <td>+</td> <td> </td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>$h(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	$-x + 1$	+	0	-	-	$-2x + 4$	+		0	-	$h(x)$	+	0	-	0	+
x	$-\infty$	1	2	$+\infty$																		
$-x + 1$	+	0	-	-																		
$-2x + 4$	+		0	-																		
$h(x)$	+	0	-	0	+																	
<p>10)</p>	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>x</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>$h(x)$</td> <td>0</td> <td>\nearrow</td> <td>4</td> <td>\searrow</td> <td>-2</td> <td>\nearrow</td> <td>0</td> </tr> </table>	x	-2	-1	2	3	$h(x)$	0	\nearrow	4	\searrow	-2	\nearrow	0								
x	-2	-1	2	3																		
$h(x)$	0	\nearrow	4	\searrow	-2	\nearrow	0															

2^{ème} partie CORRIGÉ

<p>1) Pour $4x + 8$ on a $a = 4$ donc $-\nearrow+$ Et $4x + 8 = 0 \Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{-8}{4} = -2$</p>	Réponse C.						
<p>2) On a $x = -1$ on cherche y</p>	Réponse B.						
<p>3) $b = 4$ et Coeff directeur $a = \frac{2}{1} = 2$</p>	Réponse D.						
<p>4) La courbe coupe 3 fois l'axe des x : 1 fois dans les négatifs, deux fois dans les positifs</p>	Réponse D.						
<p>5) Passe par les points</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> </table>	x	0	3	$g(x)$	1	0	Réponse B.
x	0	3					
$g(x)$	1	0					
<p>6) La courbe est en-dessous de l'axe des x pour :</p>	Réponse D.						
<p>7) $g'(x) = 3 \times 3x^2 - 2 \times 2x - 3 \times 1 + 0$</p>	Réponse D.						
<p>8) ou dessus ou en dessous de l'axe des x</p>	Réponse B.						
<p>9) Pour $x = -2$ on a $f(-2) = (-2)^2 - (-2) = 4 + 2 = 6$</p>	Réponse D.						
<p>10) $b = 2$ et Coeff directeur $a = \frac{2}{3}$</p>	Réponse D.						