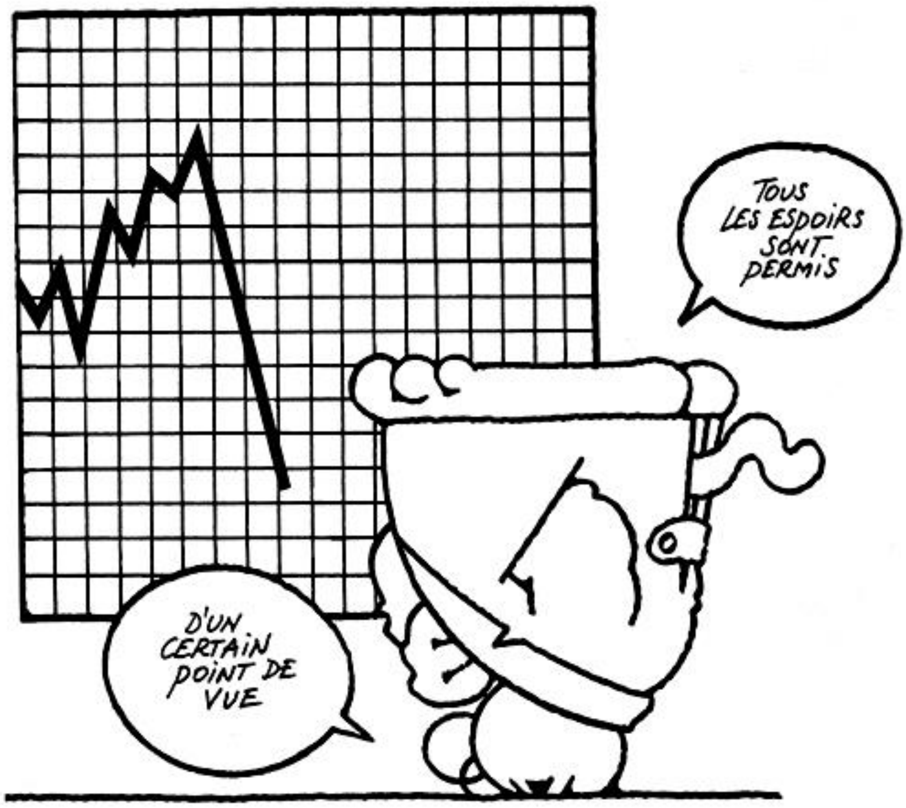
Chapitre 8

Dérivées de fonctions (2)

Savoirs

1ère partie

Df. 1	Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction
Df. 2	Tableau de variation d'une fonction à partir de la dérivée
Df. 3	Calcul de dérivée, multiples et sommes



2ème partie

Df. 4	Calcul de dérivée, produit et quotients
Df. 6	Nombre dérivé et tangente, détermination graphique
Df. 7	Équation de tangente
Type bac	Étude de fonctions

EXERCICES en classe

Savoir Df. 4 : Dérivation – Produits et quotients

Exercice 1 : Dérivée d'une exponentielle composée e^{ax+b}

Dériver les fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{-3x}$$

$$g(x) = -5e^{2x+1}$$

$$h(x) = 4 + 3e^{1-x}$$

$$i(x) = e^{\frac{1}{2}x} - 4x + 1$$

$$j(t) = t^2 - e^{3t} - 4$$

$$k(x) = 4e^{2x} - 3e^{-x}$$

Exercice 2 : Dérivée d'un inverse $\frac{1}{v}$

Dériver les fonctions suivantes :

$$a(x) = \frac{1}{3x-2}$$

$$b(x) = \frac{1}{2e^x - 1}$$

$$C(x) = \frac{1}{2x^3 - 5x}$$

$$d(x) = \frac{5}{x^2 - 3x}$$

$$T(x) = \frac{-3}{e^{2x}}$$

$$M(a) = \frac{-1}{1 - a^5}$$

Exercice 3 : Dérivée d'un quotient $\frac{u}{v}$

Dériver les fonctions suivantes :

$$F(x) = \frac{2x-4}{3-x}$$

$$g(n) = \frac{n^2 + 2n}{3n+1}$$

$$h(x) = \frac{1+e^x}{2-e^x}$$

$$K(x) = \frac{e^x}{3x}$$

$$l(x) = \frac{x^2}{2-e^x}$$

$$n(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$

Exercice 4 : Dérivée d'un produit uv

Dériver les fonctions suivantes :

$$A(x) = (x^3 - 1)(2x + 4)$$

$$b(x) = (4x - 5)e^x$$

$$c(X) = (X^2 + 2X - 3)e^X$$

$$D(x) = 2xe^x - 5$$

$$R(x) = (x^3 + 2)e^{-2x}$$

$$s(x) = x^2 - 3xe^x$$

Exercice 5 : Dérivées en vrac

Dériver les fonctions suivantes :

$$f(x) = -2xe^{1-3x}$$

$$G(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}$$

$$h(x) = (1 - 4x + 2x^2)e^{-x}$$

$$I(t) = 4t - \frac{2}{t}$$

$$j(x) = e^{-x} - xe^x$$

$$k(x) = \frac{2x^2 - 4}{4 - x}$$

$$L(a) = a^3 + \frac{e^{-3a}}{3}$$

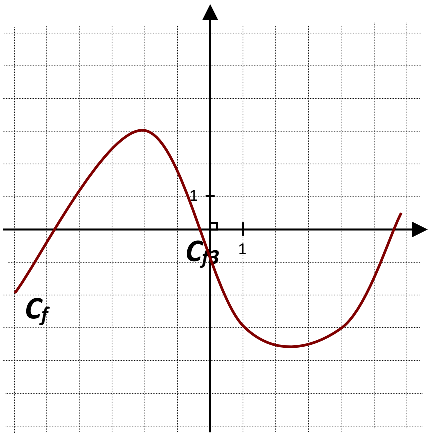
$$m(x) = -5x(2 - e^{2x})$$

$$N(x) = \frac{3}{1 - 3e^{-2x}}$$

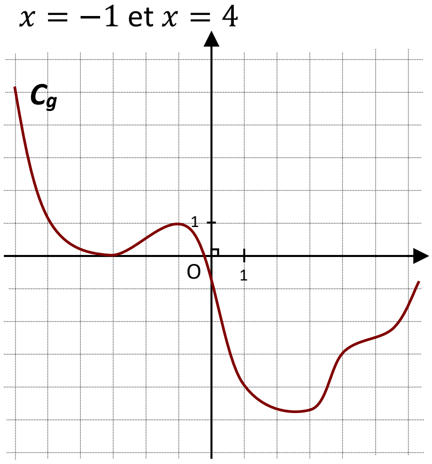
Savoir Df. 5 : Nombre dérivé et tangente - Graphique

Exercice 6 : Tracé « à la main » de tangentes

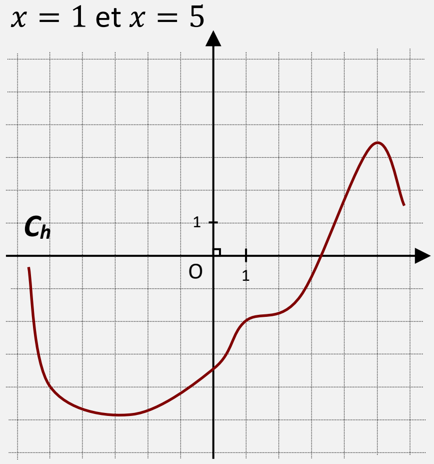
1) a) Sur le graphe ci-dessous, tracer les tangentes en $x = -2$; $x = 1$ et $x = 4$



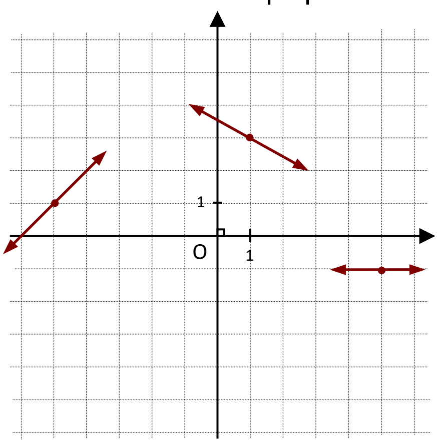
b) Sur le graphe ci-dessous, tracer les tangentes en $x = -5$; $x = -1$ et $x = 4$

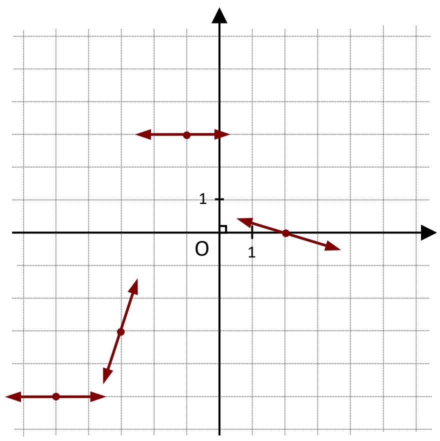


3) Sur le graphe ci-dessous, tracer les tangentes en $x = -5$; $x = 1$ et $x = 5$

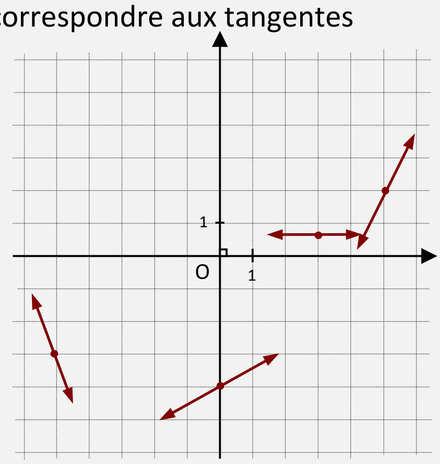


2) Dans chacun des graphiques ci-dessous, on a tracé des tangentes. Tracer des courbes qui peuvent correspondre.



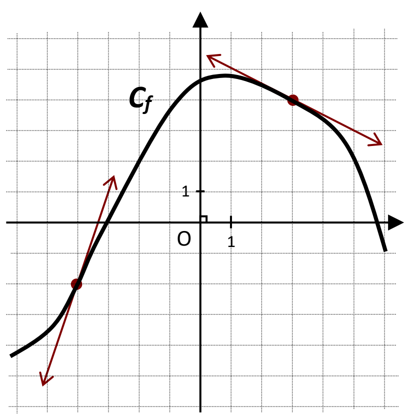


4) Tracer une courbe qui pourrait correspondre aux tangentes



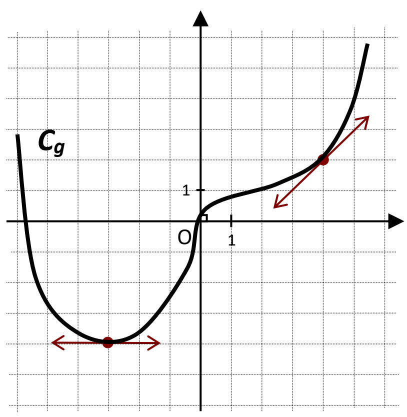
Exercice 7 : Déterminer graphiquement le nombre dérivé en un point

1) Dans chaque cas, déterminer graphiquement les images et les nombres dérivés aux points demandés.



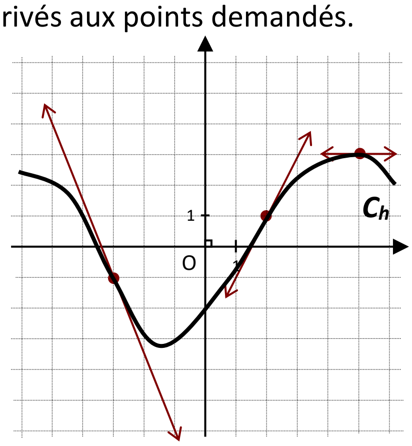
$f(-4) =$ et $f'(-4) =$

$f'(3) =$ et $f'(3) =$



$g(-3) =$ et $g'(-3) =$

$g(4) =$ et $g'(4) =$



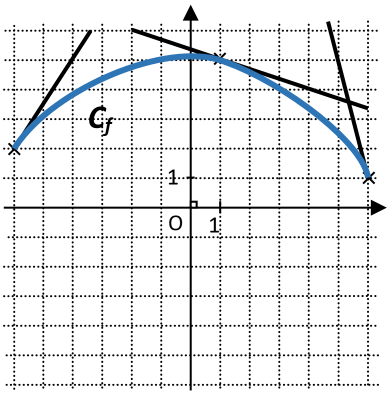
$h(-3) =$ et $h'(-3) =$

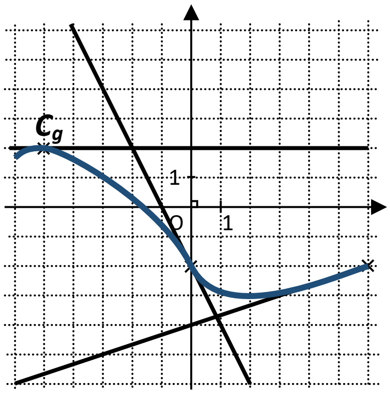
$h(2) =$ et $h'(2) =$

$h(5) =$ et $h'(5) =$

Exercice 7 (suite)

2) Sur les graphiques ci-dessous, les droites représentées sont tangentes aux courbes.





Compléter les tableaux suivants :

x	-6	1	6
$f(x)$			
$f'(x)$			

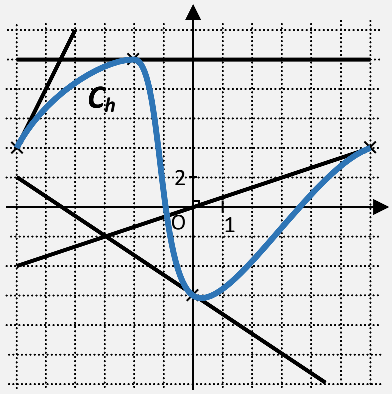
x		0	
$g(x)$			
$g'(x)$			

3) On considère le tableau de valeurs suivant :

a	-4	-2	0	2	6
$f(a)$	2	-1	3,5	5	-1
$f'(a)$	-3	0	3	$-0{,}5$	-1

a. Placer les points de la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi connus.
b. Tracer les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en ces points
c. Donner une allure possible de la courbe $\mathcal{C}_f$

4) Sur le graphique ci-dessous, les droites représentées sont tangentes à la courbe.



Compléter le tableau suivant :

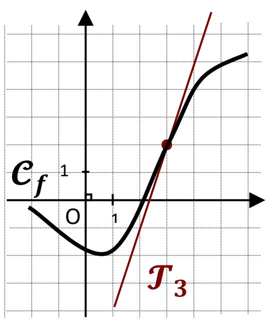
x				
$h(x)$				
$h'(x)$				

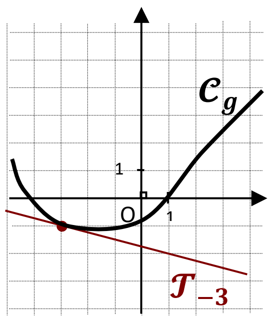
5) Tracer une courbe vérifiant les conditions suivantes :

x_0	-2	0	2	5
$g(x_0)$	1	$\frac{1}{2}$	2	1
$g'(x_0)$	$-\frac{1}{2}$	0	1	-3

Exercice 8 : Équation de tangente à partir du graphique

1) Dans chaque cas, donner une équation de la droite $\mathcal{T}_a$ représentée, tangente à la courbe donnée en $x = a$.



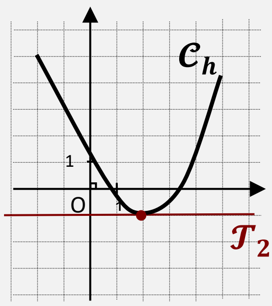


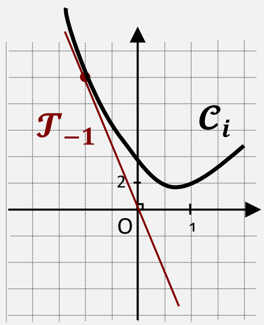
2) On donne :

a	-2	-1	1	3
$f(a)$	2	-2	-1	1
$f'(a)$	-3	0	2	6

Écrire une équation des tangentes $\mathcal{T}_a$ à $\mathcal{C}_f$ en $x = a$

3) Donner une équation de la droite $\mathcal{T}_a$ représentée, tangente à la courbe de chaque fonction en $x = a$.





4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{3x+1}{5-x}$

On donne $h'(3) = 4$

Écrire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse 3.

Savoir Df. 6 : Nombre dérivé et tangente - Calcul

Exercice 9 : Calcul de nombre dérivé

Dériver les fonctions puis calculer les nombres dérivés demandés :

a. $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$
Calculer $f'(2)$ et $f'(-1)$

b. $g(x) = 6xe^x - 3$
Calculer $g'(0)$ et $g'(1)$

c. $h(t) = \dfrac{e^{-3t}}{t}$
Calculer $h'\left(\frac{1}{3}\right)$ et $h'\left(-\frac{1}{3}\right)$

d. $i(x) = (1 - 3x^2)e^{-x}$
Calculer $i'(-2)$ et $i'(0)$

e. $k(x) = \frac{x^2-3x}{2-x}$
Calculer $k'(-3)$ et $k'(1)$

f. $M(x) = x^2 - xe^{-x}$
Calculer $M'(-1)$ et $M'(2)$

Exercice 10 : Équation de tangente

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

a. Déterminer $f'(x)$. **b.** Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.

c. Écrire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x + 1)e^x$

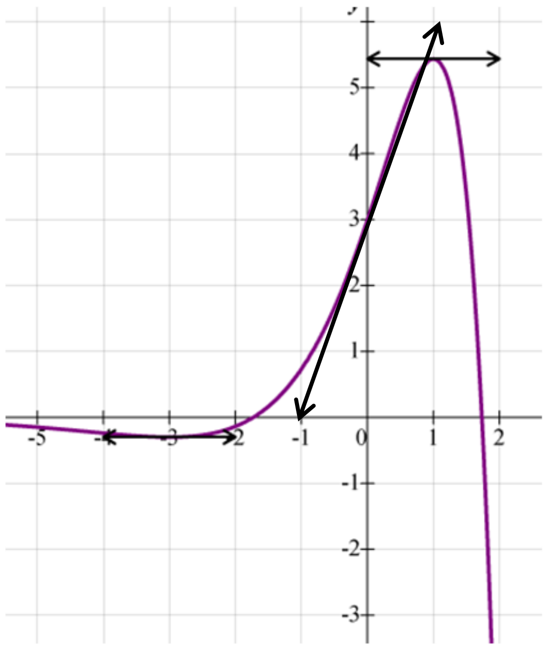
a. Déterminer $g'(x)$. **b.** Écrire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse -2

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$ par $h(x) = \frac{3x+1}{5-x}$

Écrire une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse 4.

Exercice 11 : Graphique et algébrique

La courbe $\mathcal{C}$ représente une fonction f définie et dérivable sur $]-\infty; 2]$ et certaines de ses tangentes.



a. Par <u>lecture graphique</u>, déterminer :

- les valeurs de $f(0)$; $f'(1)$; $f'(-3)$ et $f'(0)$
- une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0
- les solutions de l'équation $f(x) = 0$

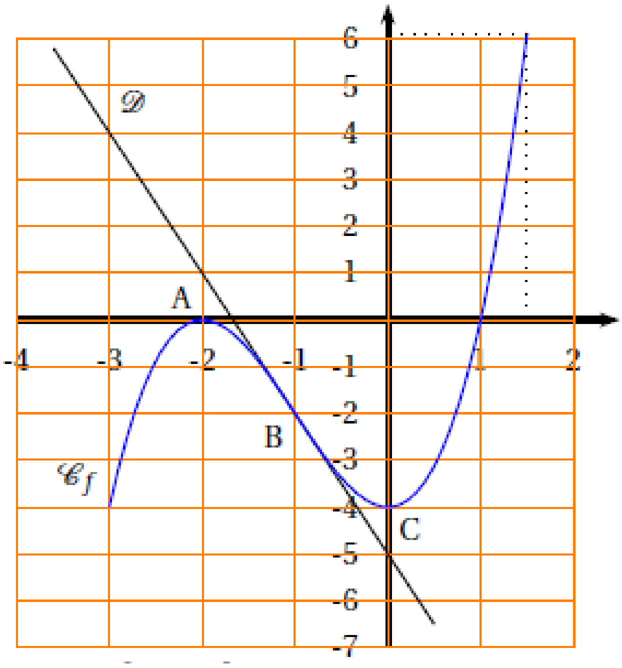
b. La courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique de la fonction $f(x) = (3 - x^2)e^x$.
Déterminer <u>par le calcul</u> les résultats demandés à la question précédente.

Exercice 12 : QCM

On donne $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-3\,;\frac{3}{2}\right]$.

$\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale aux points $A(-2\,;\,0)$ et $C(0\,;\,-4)$

$\mathcal{D}$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $B(-1\,;\,-2)$.
$\mathcal{D}$ passe par le point de coordonnées $(0\,;\,-5)$



1) Le nombre de solutions sur $\left[-3\,;\frac{3}{2}\right]$ de l'équation $f(x) = 0$ est :

A. 1 B. 2 C. 3

2) Les solutions sur $\left[-3\,;\frac{3}{2}\right]$ de l'équation $f'(x) = 0$ sont :

A. −2 et 1 B. −2 et 0 C. −3 et 0

3) Le nombre dérivé $f'(-1)$ est égal à :

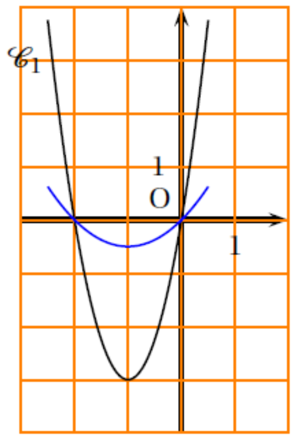
A. $\frac{3}{2}$ B. -2 C. -3

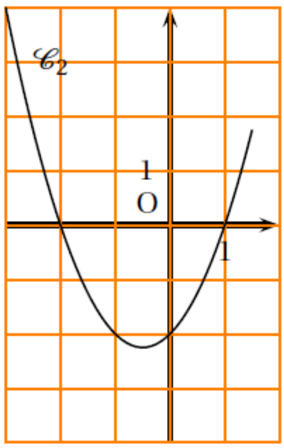
4) Une équation de la droite $\mathcal{D}$ est :

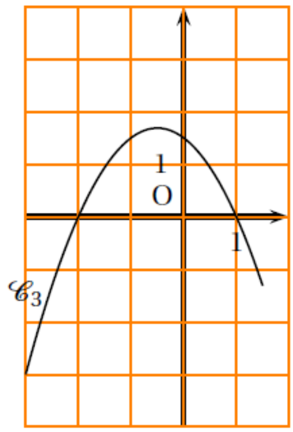
A. $y = -3x$ B. $y = -3x - 5$ C. $y = -2x - 5$

5) La représentation graphique de la fonction dérivée f' de la fonction f est :

A.







Exercice 13 : Étude de fonction (hors contexte)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$

1) Déterminer l'expression de sa dérivée $f'(x)$.

2) Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle [–5 ; 3].

3) En déduire le tableau de variations de $f(x)$ sur l'intervalle [–5 ; 3].

4) Tracer une allure de la courbe représentative de f sur [–5 ; 3] en faisant apparaître les tangentes aux extrema ainsi qu'en $x = -5$ et en $x = 3$.

Exercices type bac

Exercice 14 : QCM

Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse incorrecte ou une absence de réponse n'apporte ni ne retire de point

Question 1

On donne ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f .
Cette courbe a une tangente $\mathcal{T}$ au point $A(-3\ ;\ 3)$.

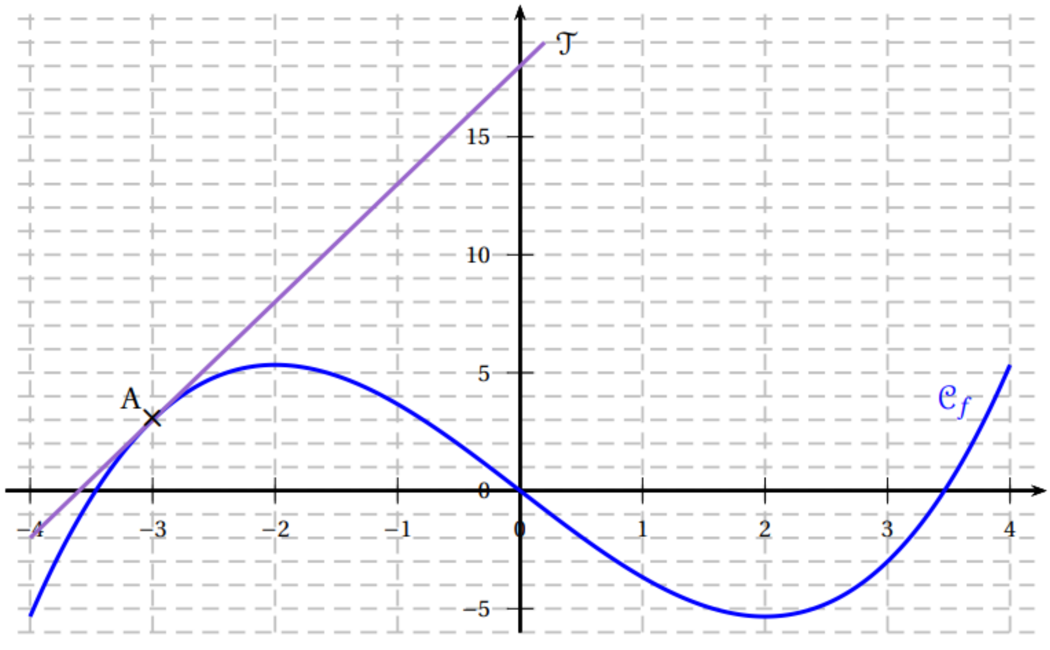
L'équation réduite de cette tangente est :

a. $y = \frac{1}{5}x - 3{,}7$

b. $y = \frac{1}{5}x + 18$

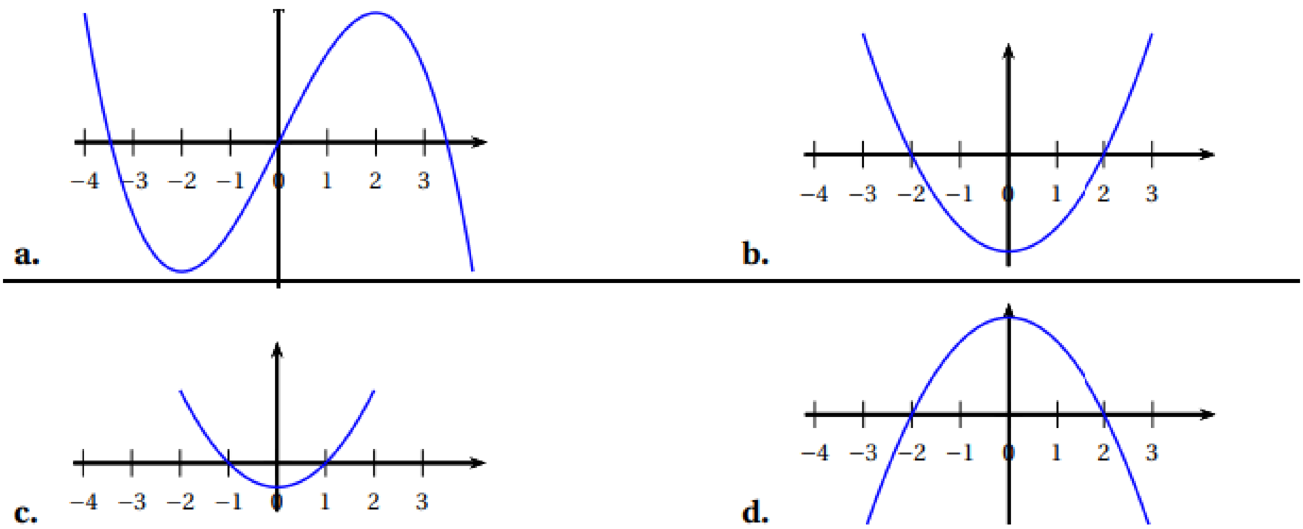
c. $y = 5x + 18$

d. $y = 5x - 3{,}7$.



Question 2

On reprend la fonction f de la question précédente. La représentation graphique de sa fonction dérivée est :



Question 3
On considère la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$.
Cette fonction est strictement positive sur l'intervalle :

a. $]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$ **b.** $]-1; 3[$ **c.** $]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$ **d.** $]-3; 1[$.

Question 4
On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x-1)e^x$.
La fonction dérivée de la fonction h est définie sur R par :

a. $h'(x) = 2e^x$ **b.** $h'(x) = (2x+1)e^x$ **c.** $h'(x) = (2x-1)e^x$ **d.** $h'(x) = -e^x$.

Exercice 15 : Type bac 1

On modélise la diffusion dans le sang d'un médicament de 1 gramme par intraveineuse (fonction f_1, courbe représentative C_1) ou par voie orale (fonction f_2, courbe représentative C_2) pendant une durée de 10 heures.

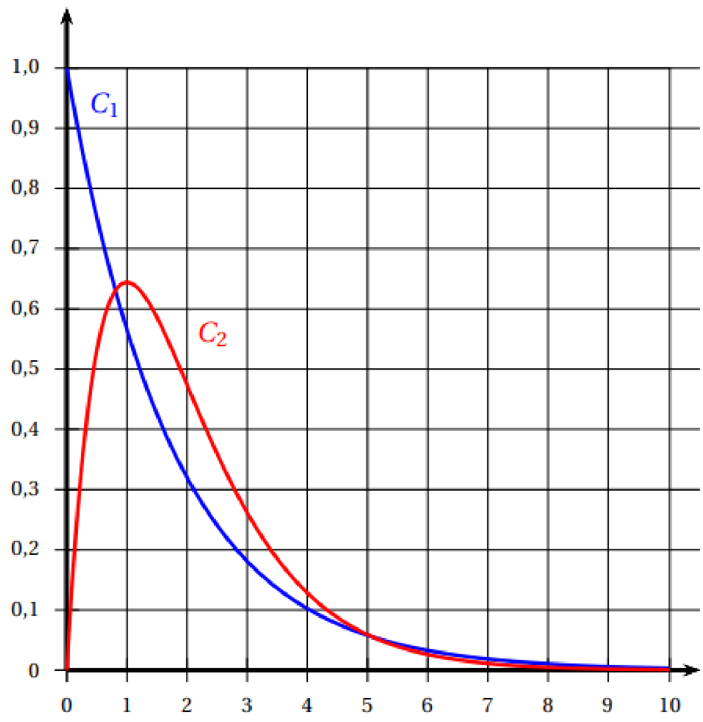
Plus précisément :

- $f_1(t)$ modélise la proportion du médicament dans le sang à l'instant t, où t est le temps en heure après injection par intraveineuse;
- $f_2(t)$ modélise la proportion du médicament dans le sang à l'instant t, où t est le temps en heure après administration par voie orale.

Pour tout réel t de l'intervalle [0; 10], on admet que :

$f_1(t) = e^{-0,57t}$ et $f_2(t) = 1,75\, t\, e^{-t}$.

Les courbes C_1 et C_2 de f_1 et f_2 sont représentées ci-contre.



1. Injection par voie intraveineuse

a. Déterminer le sens de variation de la fonction f_1.

b. Résoudre graphiquement $f_1(t) < 0,1$.

Interpréter la réponse dans le contexte.

2. Administration par voie orale

On note f_2' fonction dérivée de la fonction f_2.

a. Montrer que, pour tout t de [0; 10], $f_2'(t) = 1,75(1-t)e^{-t}$.

b. Construire le tableau de variations de la fonction f_2.

c. À quel instant t la proportion de médicament dans le sang est-elle la plus élevée ?

Exercice 16 : type bac 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 2,5x + 1)e^x$.

1. On note f' la fonction dérivée de f .

a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = (x^2 - 0,5x - 1,5)e^x$.

b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative dans un repère et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ de la fonction f au point A d'abscisse 0.

a. Déterminer une équation de la tangente T .

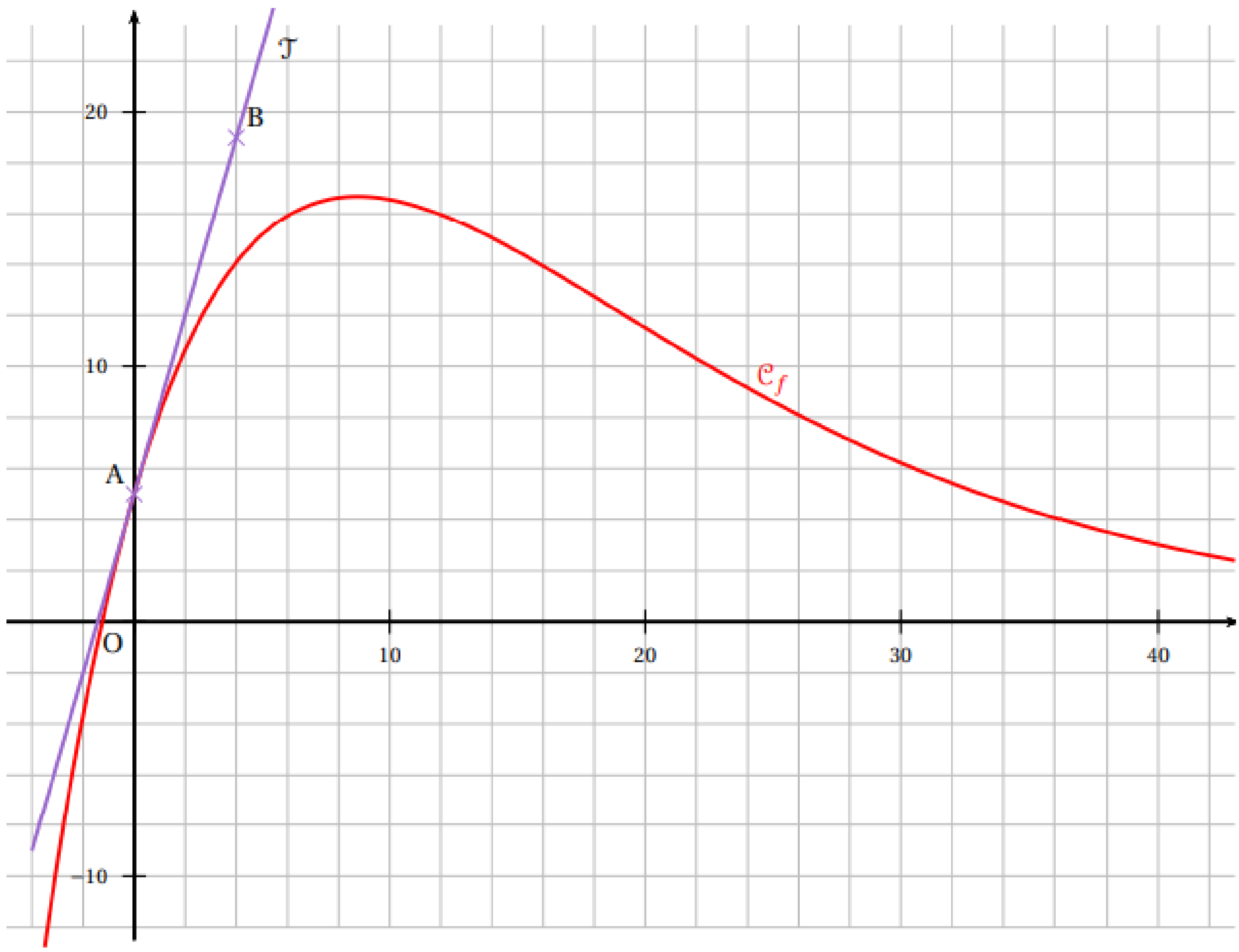
b. On admet que la tangente T recoupe la courbe $\mathcal{C}_f$ au point P d'abscisse a strictement positive.
À l'aide de votre calculatrice, donner un encadrement de a au dixième près.

Exercice 17 : type bac 3

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax + b)e^{-0,1x}$$

où a et b sont des réels fixés.
La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous, dans un repère orthogonal.
On a également représenté la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point $A(0;\ 5)$.
On admet que cette tangente $\mathcal{T}$ passe par le point $B(4;\ 19)$.



1. a. Déterminer graphiquement $f(0)$,

b. En déduire la valeur de b.

2. a. Déterminer graphiquement $f'(0)$

b. En déduire une équation de la droite $\mathcal{T}$.

c. Exprimer, pour tout réel x, la dérivée $f'(x)$ en fonction de x et de a.

En déduire que pour tout réel x, on a $f(x) = (4x + 5)e^{-0,1x}$

3. On souhaite déterminer le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-0,4x + 3,5)e^{-0,1x}$

b. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$ et en déduire le maximum de f sur $\mathbb{R}$

Corrections

Corrigés Savoir Df. 4

Corrigé Exercice 1 $(e^{ax}+b)' = ae^{ax+b}$

$f'(x) = \mathbf{-3e^{-3x}}$

$g'(x) = \mathbf{-10e^{2x+1}}$

$h'(x) = \mathbf{-3e^{1-x}}$

$i'(x) = \mathbf{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - 4}$

$j'(t) = \mathbf{2t - 3e^{3t}}$

$k'(x) = \mathbf{8e^{2x} + 3e^{-x}}$

Corrigé Exercice 2 $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$

$u = 3x - 2$ **et** $u' = 3$

$a'(x) = \dfrac{\mathbf{-3}}{\mathbf{(3x-2)^2}}$

$u = 2e^x - 1$ **et** $u' = 2e^x$

$b'(x) = \dfrac{\mathbf{-2e^x}}{\mathbf{(2e^x-1)^2}}$

$u = 2x^3 - 5x$ **et** $u' = 6x^2 - 5$

$C'(x) = \dfrac{-(6x^2-5)}{(2x^3-5x)^2} = \dfrac{\mathbf{-6x^2+5}}{\mathbf{(2x^3-5x)^2}}$

$u = x^2 - 3x$ **et** $u' = 2x - 3$

$d'(x) = \dfrac{5(2x-3)}{(x^2-3x)^2}$

$u = e^{2x}$ **et** $u' = 2e^{2x}$

$T'(x) = \dfrac{-3\times(-2e^{2x})}{(e^{2x})^2}$

$= \dfrac{6e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{e^{2x}}}$

$u = 1 - a^5$ **et** $u' = -5a^4$

$M'(a) = \dfrac{-1\times(-1)\times(-5a^4)}{(1-a^5)^2}$

$= \dfrac{\mathbf{-5a^4}}{\mathbf{(1-a^5)^2}}$

Corrigé Exercice 3 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$u = 2x - 4$ **et** $u' = 2$
$v = 3 - x$ **et** $v' = -1$

$F'(x) = \dfrac{2(3-x)-(-1)(2x-4)}{(3-x)^2}$

$= \dfrac{6-2x+2x-4}{(3-x)^2} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{(3-x)^2}}$

$u = n^2 + 2n$ **et** $u' = 2n + 2$
$v = 3n + 1$ **et** $v' = 3$

$g'(n) = \dfrac{(2n+2)(3n+1)-(3)(n^2+2n)}{(3n+1)^2}$

$= \dfrac{6n^2+2n+6n+2-3n^2-6n}{(3n+1)^2} = \dfrac{\mathbf{3n^2+2n+2}}{\mathbf{(3n+1)^2}}$

$u = e^x$ **et** $u' = e^x$
$v = 3x$ **et** $v' = 3$

$K'(x) = \dfrac{(e^x)(3x)-(3)(e^x)}{(3x)^2} = \dfrac{(3x-3)e^x}{9x^2}$

$= \dfrac{\mathbf{(x-1)e^x}}{\mathbf{3x^2}}$

$u = x^2$ **et** $u' = 2x$
$v = 2 - e^x$ **et** $v' = -e^x$

$l'(x) = \dfrac{(2x)(2-e^x)-(-e^x)(x^2)}{(2-e^x)^2}$

$= \dfrac{4x-2xe^x+x^2e^x}{(2-e^x)^2} = \dfrac{\mathbf{4x+(x^2-2x)e^x}}{\mathbf{(2-e^x)^2}}$

$u = 1 + e^x$ **et** $u' = e^x$
$v = 2 - e^x$ **et** $v' = -e^x$

$$h'(x) = \frac{(e^x)(2-e^x) - (-e^x)(1+e^x)}{(2-e^x)^2}$$
$$= \frac{2e^x - e^{2x} + e^x + e^{2x}}{(2-e^x)^2} = \boldsymbol{\frac{3e^x}{(2-e^x)^2}}$$

$u = x^2$ **et** $u' = 2x$
$v = x^2 - 1$ **et** $v' = 2x$

$$n'(x) = \frac{(2x)(x^2-1) - (2x)(x^2)}{(x^2-1)^2}$$
$$= \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \boldsymbol{\frac{-2x}{(x^2-1)^2}}$$

Corrigé Exercice 4 $(uv)' = u'v + uv'$

$u = x^3 - 1$ **et** $u' = 3x^2$
$v = 2x + 4$ **et** $v' = 2$

$$A'(x) = (3x^2)(2x+4) + (2)(x^3-1)$$
$$= 6x^3 + 12x^2 + 2x^3 - 2 = \boldsymbol{8x^3 + 12x^2 - 2}$$

$u = 4x - 5$ **et** $u' = 4$
$v = e^x$ **et** $v' = e^x$

$$b'(x) = (4)(e^x) + (e^x)(4x - 5\ )$$
$$= (4x - 5 + 4)e^x = \boldsymbol{(4x-1)e^x}$$

$u = 2x$ **et** $u' = 2$
$v = e^x$ **et** $v' = e^x$
Attention, il y a aussi une somme, le -5 est à part

$$D'(x) = (2)(e^x) + (e^x)(2x) + 0 = \boldsymbol{(2x+2)e^x}$$

$u = x^3 + 2$ **et** $u' = 3x^2$
$v = e^{-2x}$ **et** $v' = -2e^{-2x}$

$$R'(x) = (3x^2)(e^{-2x}) + (-2e^{-2x})(x^3+2)$$
$$= \boldsymbol{(3x^2 - 2x^3 - 4)e^{-2x}}$$

$u = X^2 + 2X - 3$ **et** $u' = 2X + 2$
$v = e^X$ **et** $v' = e^X$

$$c'(X) = (2X+2)(e^X) + (e^X)(X^2 + 2X - 3)$$
$$= (2X + 2 + X^2 + 2X - 3)e^X = \boldsymbol{(X^2 + 4X - 1)e^X}$$

$u = -3x$ **et** $u' = -3$
$v = e^x$ **et** $v' = e^x$
Attention, il y a une somme, le x^2 est à part

$$s'(x) = 2x + (-3)(e^x) + (e^x)(-3x)$$
$$= \boldsymbol{2x - 3(x+1)e^x}$$

Corrigé Exercice 5

Produit $u'v + uv'$ avec : $u = -2x$ **et** $u' = -2$
$v = e^{1-3x}$ **et** $v' = -3e^{1-3x}$

$$f'(x) = -2e^{1-3x} - 3e^{1-3x}(-2x)$$
$$= \boldsymbol{(6x-2)e^{1-3x}}$$

Quotient $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec : $u = e^{2x}$ **et** $u' = 2e^{2x}$
$v = x^2$ **et** $v' = 2x$

$$G'(x) = \frac{2e^{2x} \times x^2 - 2x \times e^{2x}}{(x^2)^2} = \frac{(2x^2 - 2x)e^{2x}}{x^4}$$
$$= \frac{2x(x-1)e^{2x}}{x^4} = \boldsymbol{\frac{2(x-1)e^{2x}}{x^3}}$$

Juste une somme… $I'(t) = \boldsymbol{4 + \frac{2}{t^2}}$

Le 2ème terme est un produit avec $u = -x$ **et** $u' = -1$
$v = e^x$ **et** $v' = e^x$

$$j'(x) = -e^{-x} - 1e^x - xe^x = \boldsymbol{-e^{-x} - (x+1)e^x}$$

C'est juste une somme, pas de variable dans le dénominateur du 2e terme, c'est juste un facteur

$$L'(a) = 2a^2 + \frac{-3e^{-3a}}{3} = \boldsymbol{2a^2 - e^{-3a}}$$

Produit $u'v + uv'$ avec : $u = -5x$ **et** $u' = -5$
$v = 2 - e^{2x}$ **et** $v' = -2e^{2x}$

$$m'(x) = -5(2 - e^{2x}) - 5x(-2e^{2x})$$
$$= -10 + 5e^{2x} + 10xe^{2x}$$
$$= \boldsymbol{-10 + 5(1+2x)e^{2x}}$$

Produit $u'v+uv'$ avec $u=1-4x+2x^2$ **et** $u'=-4+4x$
$v=e^{-x}$ **et** $v'=-e^{-x}$

$h'(x)=(-4+4x)e^{-x}+(1-4x+2x^2)(-e^{-x})=(\mathbf{-2x^2+8x-5})\boldsymbol{e^{-x}}$

Quotient $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec : $u=2x^2-4$ **et** $u'=4x$
$v=4-x$ **et** $v'=-1$

$$k'(x)=\frac{4x(4-x)-(2x^2-4)}{(4-x)^2}=\frac{16x-4x^2-2x^2+4}{(4-x)^2}=\frac{\mathbf{-6x^2+16x+4}}{\mathbf{(4-x)^2}}$$

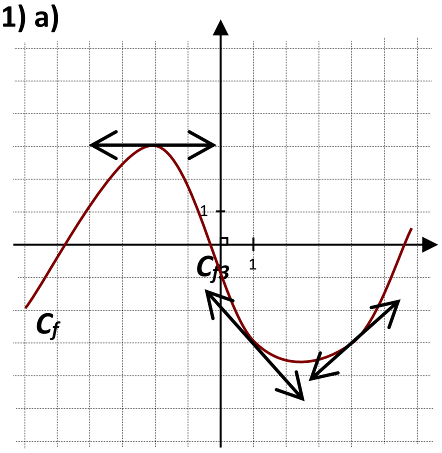
Inverse $\frac{-v'}{v^2}$ avec :
$u=1-3e^{-2x}$ **et** $u'=6e^{-2x}$

$$N'(x)=\frac{3(-6e^{-2x})}{(1-3e^{-2x})^2}=\frac{\mathbf{-18e^{-2x}}}{\mathbf{(1-3e^{-2x})^2}}$$

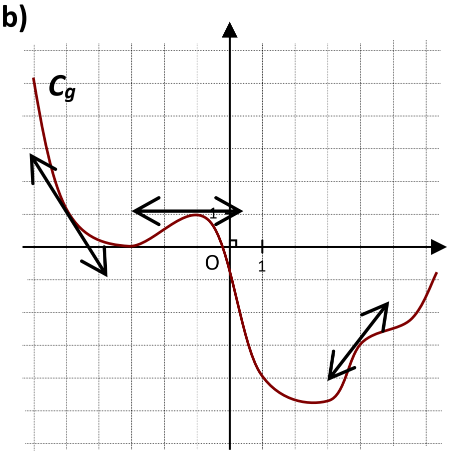
Corrigés Savoir Df. 5

Corrigé Exercice 6

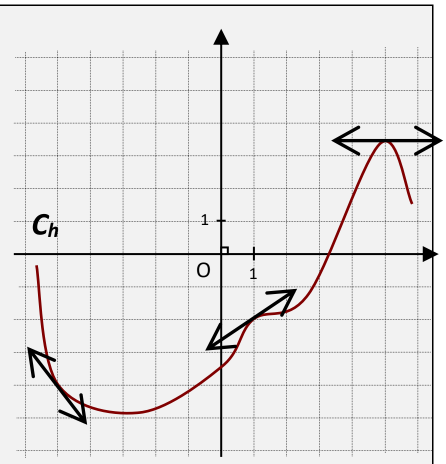
1) a)



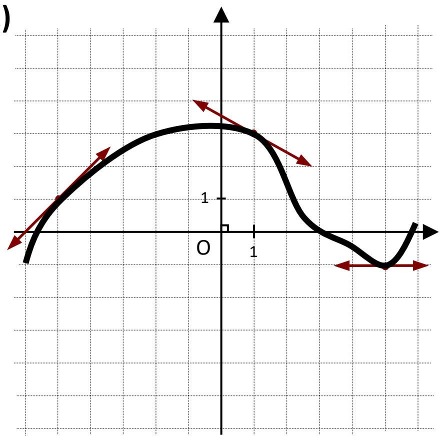
b)

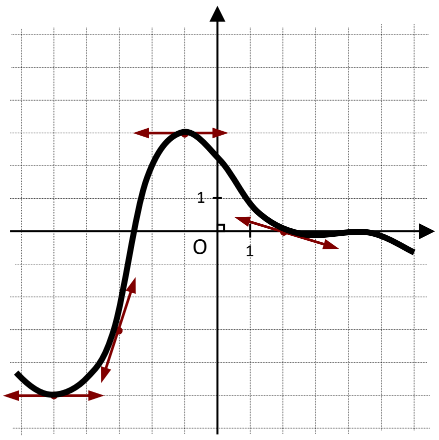


3)

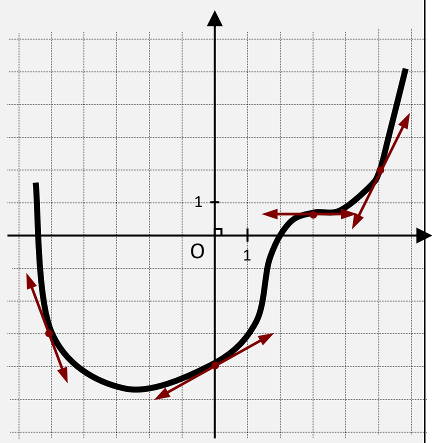


2)





4)



Corrigé Exercice 7

1)

$f(-4)=\mathbf{-2}$ *et* $f'(-4)=\mathbf{3}$

$f'(3)=\mathbf{4}$ *et* $f'(3)=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

$g(-3)=\mathbf{-4}$ *et* $g'(-3)=\mathbf{0}$

$g(4)=\mathbf{2}$ *et* $g'(4)=\mathbf{1}$

$h(-3)=\mathbf{-1}$ *et* $h'(-3)=-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

$h(2)=\mathbf{1}$ *et* $h'(2)=\mathbf{2}$

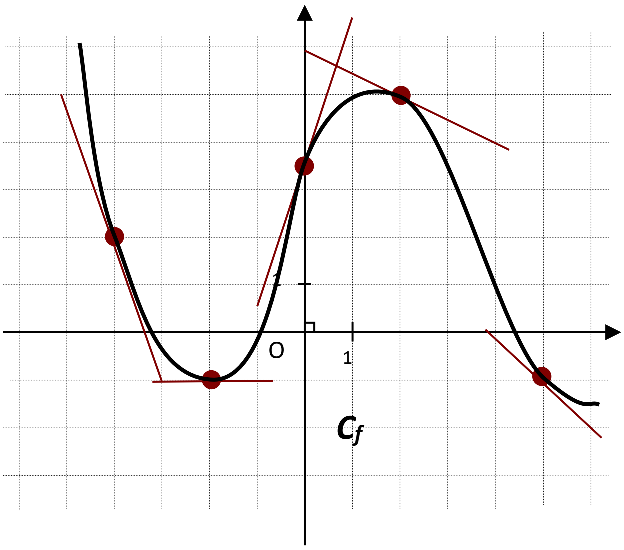
$h(5)=\mathbf{3}$ *et* $h'(5)=\mathbf{0}$

2)

x	-6	1	6
$f(x)$	**2**	**5**	**1**
$f'(x)$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{3}$	**−4**

x	**−5**	0	**6**
$g(x)$	**2**	**−2**	**−2**
$g'(x)$	**0**	**−2**	$\frac{1}{3}$

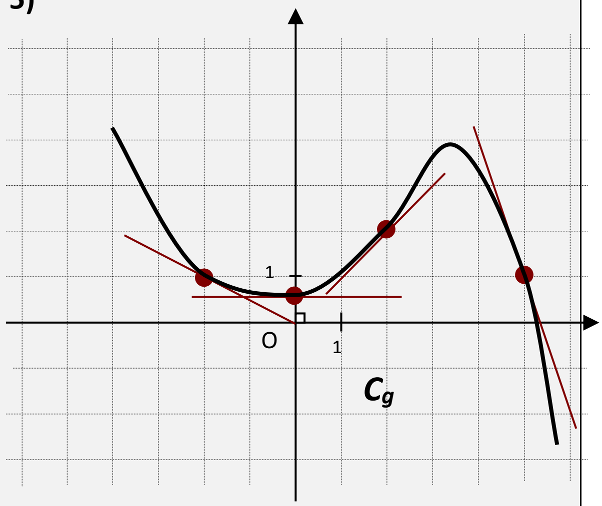
3)



3)

x	**−6**	**−2**	**0**	**6**
$h(x)$	**4**	**10**	**−6**	**2**
$h'(x)$	**4** (unités !)	**0**	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$

5)



Corrigé Exercice 8

1) $\mathcal{T}_3 : \ y = f'(3).(x-3) + f(3)$
$\Leftrightarrow \ y = 3(x-3) + 2 \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{y = 3x - 7}$

$\mathcal{T}_{-3} : \ y = f'(-3)(x+3) + f(-3)$
$\Leftrightarrow \ y = -\frac{1}{4}(x+3) - 1 \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{y = -\frac{1}{4}x - \frac{7}{4}}$

2) $\mathcal{T}_{-2} : \ y = f'(-2).(x+2) + f(-2)$
$\Leftrightarrow \ y = -3(x+2) + 2 \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{y = -3x - 4}$

$\mathcal{T}_{-1} : \ y = f'(-1).(x+1) + f(-1)$
$\Leftrightarrow \ y = 0(x+1) - 2 \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{y = -2}$
Tangente horizontale

$\mathcal{T}_1 : \ y = f'(1).(x-1) + f(1)$
$\Leftrightarrow \ y = 2(x-1) - 1 \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{y = 2x - 3}$

$\mathcal{T}_3 : \ y = f'(3).(x-3) + f(3)$
$\Leftrightarrow \ y = 6(x-3) + 1 \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{y = 6x - 17}$

3) $\mathcal{T}_2 : \ y = f'(2).(x-2) + f(2)$
$\Leftrightarrow \ y = 0(x-2) - 1$
$\Leftrightarrow \ \boldsymbol{y = -1}$
Tangente horizontale

$\mathcal{T}_{-1} : \ y = f'(-1).(x+1) + f(-1)$
$\Leftrightarrow \ y = -10(x+1) + 10$
$\Leftrightarrow \ \boldsymbol{y = -10x}$

4) $\mathcal{T} : \ y = h'(3)(x-3) + g(3)$
On a $g(3) = \frac{3\times3+1}{5-3} = \frac{10}{2} = 5$
$\Leftrightarrow \ y = 4(x-3) + 5$
$\Leftrightarrow \ \boldsymbol{y = 4x - 7}$

Corrigés Savoir Df. 6

Corrigé Exercice 9

a. $f'(x) = \mathbf{6x - 3}$

$f'(2) = 12 - 3 = \mathbf{9}$ et $f'(-1) = -6 - 3 = \mathbf{-9}$

b. $g'(x) = 6e^x + 6xe^x = \mathbf{6(x+1)e^x}$

$g'(0) = 6e^0 = \mathbf{6}$ et $g'(1) = 6 \times 2e^1 = \mathbf{12e}$

c. $h'(t) = \frac{-3te^{-3t} - e^{-3t}}{t^2} = \frac{\mathbf{(-3t-1)e^{-3t}}}{\mathbf{t^2}}$

$h'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(-3\times\frac{1}{3}-1\right)e^{-3\times\frac{1}{3}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{-2e^{-1}}{\frac{1}{9}} = -18e^{-1} = -\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{e}}$

et $h'\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)-1\right)e^{-3\times\left(\frac{-1}{3}\right)}}{\frac{1}{9}} = 9 \times (1-1)e^1 = \mathbf{0}$

d. $i'(x) = (-6x)e^{-x} + (1-3x^2)(-e^{-x}) = \mathbf{(3x^2 - 6x - 1)e^{-x}}$

$i'(-2) = (3 \times 4 + 12 - 1)e^{-(-2)} = \mathbf{23e^{-2}}$ et $i'(0) = -1e^0 = \mathbf{-1}$

e. $k'(x) = \frac{(2x-3)(2-x)-(-1)(x^2-3x)}{(2-x)^2}$

$= \frac{4x-2x^2-6+3x+x^2-3x}{(2-x)^2} = \frac{\mathbf{-x^2+4x-6}}{\mathbf{(2-x)^2}}$

$k'(-3) = \frac{-9-12-6}{(2+3)^2} = \frac{\mathbf{-27}}{\mathbf{25}}$ et $k'(1) = \mathbf{-3}$

f. $M'(x) = 2x - 1e^{-x} - x(-e^{-x})$

$= \mathbf{2x + (x-1)e^{-x}}$

$M'(-1) = -2 - 2e^{-(-1)} = -2 - 2e$

et $M'(2) = \mathbf{4 + e^{-2}}$

Corrigé Exercice 10

1) a. $f'(x) = 4x - 3$ **b.** $f(1) = 2 - 3 + 1 = 0$ et $f'(1) = 4 - 3 = 1$

c. $\mathcal{T} :\ y = f'(1)(x-1) + f(1) \Leftrightarrow\ y = 1(x-1) + 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{y = x - 1}$

2) a. $g'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x$

b. On a $g(-2) = (-4+1)e^{-2} = -3e^{-2}$ et $g'(-2) = (-4+3)e^{-2} = -e^{-2}$
donc $\mathcal{T} :\ y = g'(-2)(x+2) + g(-2) \Leftrightarrow\ y = -e^{-2}(x+2) - 3e^{-2}\ \Leftrightarrow\ \mathbf{y = -e^{-2}x - 5e^{-2}}$

3) On dérive : $h'(x) = \frac{3(5-x)-(-1)(3x+1)}{(5-x)^2} = \frac{15-3x+3x+1}{(5-x)^2} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{(5-x)^2}}$
On a $h(4) = \frac{12+1}{5-4} = \frac{13}{1} = 13$ et $h'(4) = \frac{16}{(1)^2} = 16$
Donc $\mathcal{T} :\ y = h'(4)(x-4) + h(4) \Leftrightarrow\ y = 16(x-4) + 13\ \Leftrightarrow\ \mathbf{y = 16x - 51}$

Corrigé Exercice 11

a. $f(0) = 3$; $f'(1) = 0$; $f'(-3) = 0$ et $f'(0) = 3$ et $\mathcal{T} :\ y = f'(0)(x-0) + f(0)\ \Leftrightarrow\ \mathbf{y = 3x + 3}$
$f(x) = 0\ \Rightarrow\ S = \{-1{,}7 ; 1{,}8\}$

b. $f(x) = (3 - x^2)e^x$ → On a $f(0) = (3-0)e^0 = 3 \times 1 = \mathbf{3}$
On a $f'(x) = -2xe^x + (3-x^2)e^x = \mathbf{(-x^2 - 2x + 3)e^x}$
Et : $f'(0) = 3e^0 = 3$; $f'(1) = (-1-2+3)e = 0e = 0$ et $f'(-3) = (-9+6+3)e^{-3} = 0 \times e^{-3} = 0$
L'équation de la tangente s'obtient de la même façon : $\mathcal{T} :\ y = f'(0)(x-0) + f(0)\ \Leftrightarrow\ \mathbf{y = 3x + 3}$

$Pour\ f(x) = 0\ \Leftrightarrow\ (3-x^2)e^x = 0$ Comme la fonction exponentielle ne s'annule jamais, on a :
$f(x) = 0\ \Leftrightarrow\ 3 - x^2 = 0\ \Leftrightarrow\ x^2 = 3\ \Leftrightarrow\ x = -\sqrt{3}\ ou\ x = \sqrt{3}$
Donc $\mathbf{S} = \{-\mathbf{\sqrt{3}} ; \mathbf{\sqrt{3}}\}$ c e qui donne les valeurs approchées $-1{,}7\ et\ 1{,}7$

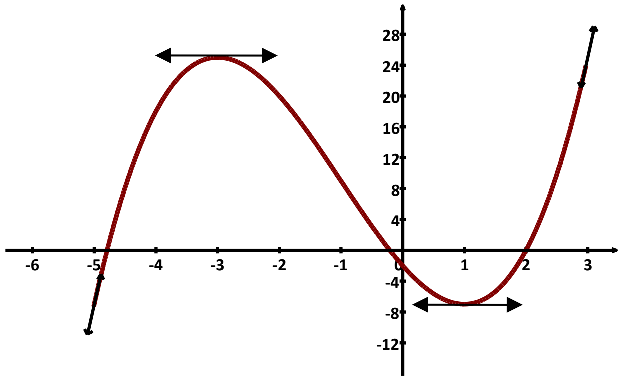
Corrigé Exercice 12

1 – B **2 – B** **3 – C** **4 – B** **5 – A**

Corrigé Exercice 13

1) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

2) & 3) $\Delta = 144 \;\; donc \;\; x_1 = 1 \;\; et \;\; x_2 = -3$



x	$-\infty$	-5		-3		1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	|	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	|	$+$
$f(x)$		$\mathbf{-7}$	$\nearrow$	$\mathbf{25}$	$\searrow$	$\mathbf{-7}$	$\nearrow$	$\mathbf{25}$	

Corrigés type bac

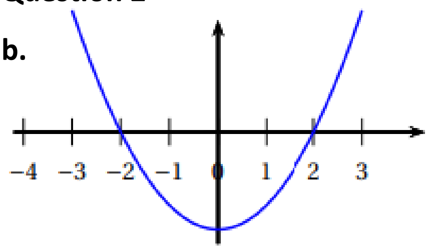
Corrigé Exercice 14

Question 1

c. $y = 5x + 18$

Question 2

b.



Question 3

b. $]-1;3[$

Question 4

b. $h'(x) = (2x+1)e^x$

Corrigé Exercice 15

***1.* a.** On a $f'_1(x) = -0{,}57e^{-0{,}57t}$.

L'exponentielle étant toujours positive, la dérivée f_1' est elle toujours négative : la fonction $\boldsymbol{f_1}$ **est strictement décroissante.**

b. $f_1(t) < 0{,}1$ pour $x \geq 4$ donc $\boldsymbol{S} =]\mathbf{4};\mathbf{10}]$

La proportion de médicament dans le sang tombe sous les 10% à partir de 4h après injection

***2.* a.** $f_2'(t) = 1{,}75\, e^{-t} + 1{,}75\, t(-e^{-t}) = (1{,}75 - 1{,}75t)e^{-t} = \mathbf{1,75(1-t)}\boldsymbol{e^{-t}} \quad CQFD$

b.

t	0		1		10
$1-t$		$+$	0	$-$	
e^{-t}		$+$	|	$+$	
$f_2'(t)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
$f_2(t)$	0	$\nearrow$	$1{,}75e^{-1}$	$\searrow$	$17{,}5e^{-10}$

c. La fonction f_2 a un maximum en $t = 1$

La proportion de médicament dans le sang sera la plus élevée au bout d'une heure

Corrigé Exercice 16

1. a. $f'(x) = (2x - 2,5)e^x + (x^2 - 2,5x + 1)e^x = (2x - 2,5 + x^2 - 2,5x + 1)e^x = \boldsymbol{(x^2 - 0,5x - 1,5)e^x}$. **CQFD**

b. Pour $x^2 - 0,5x - 1,5$ on a $\Delta = 6,25$; $x_1 = 1,5$ et $x_2 = -1$

x	$-\infty$		-1		$1,5$		$+\infty$
$x^2 - 0,5x - 1,5$		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^x		$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\boldsymbol{4,5e^{-1}}$	$\searrow$	$\boldsymbol{-2,5e^{1,5}}$	$\nearrow$	

2. a. On a $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1,5$ donc T : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{y = -1,5x + 1}$

b. On cherche à résoudre $(a^2 - 2,5a + 1)e^a = -1,5a + 1$ a avec $a > 0$
soit $(a^2 - 2,5a + 1)e^a + 1,5a - 1 = 0$

On affiche à la calculatrice le tableau de valeur de la fonction
$g(a) = (a^2 - 2,5a + 1)e^a + 1,5a - 1$

On trouve le tableau ci-contre (en resserrant au fur et à mesure)

Avec $g(1,77) < 0$ et $g(1,78) > 0$

On a donc $\boldsymbol{a \simeq 1,8}$

a	$g(a)$
1,7	-0,4206211
1,71	-0,3751126
1,72	-0,3276749
1,73	-0,2782612
1,74	-0,2268235
1,75	-0,1733133
1,76	-0,1176811
1,77	-0,0598763
1,78	0,00015243
1,79	0,06245733
1,8	0,12709166

Corrigé Exercice 17

1. a. $f(0) = 5$

b. À partir de la formule, on a : $f(0) = (a \times 0 + b)e^{-0,1\times 0} = be^0 = b$ On en déduit que $\boldsymbol{b = 5}$

2. a. $f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{14}{4} = \boldsymbol{\frac{7}{2}}$

b. $\mathcal{T}$: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{y = \frac{7}{2}x + 5}$

c. À partir de la formule de f, on a : $f'(x) = ae^{-0,1x} + (ax + 5)(-0,1e^{-0,1x}) = \boldsymbol{(-0,1ax + a - 0,5)e^{-0,1x}}$
Et en particulier, $f'(0) = (a - 0,5)e^0 = a - 0,5$
Comme on a vu que $f'(0) = \frac{7}{2}$ on en déduit l'équation $a - 0,5 = \frac{7}{2}$ $\Leftrightarrow$ $a = 3,5 + 0,5 = 4$

Avec $b = 5$ et $a = 4$, on a bien $\boldsymbol{f(x) = (4x + 5)e^{-0,1x}}$

3. a. On avait montré que :
$f'(x) = (-0,1ax + a - 0,5)e^{-0,1x}$
donc avec $a = 4$, on a bien
$f'(x) = (-0,4x + 4 - 0,5)e^{-0,1x} = \boldsymbol{(-0,4x + 3,5)e^{-0,1x}}$

b. $-0,4x + 3,5 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = \frac{3,5}{0,7} = 8,75$
et $f(8,75) = (4 \times 8,75 + 5)e^{-0,1\times 8,75} = 40e^{-0,875} \simeq 16,7$

Le maximum de f, atteint en 8,75, est de $40e^{-0,875}$ soit environ 16,7

x	$-\infty$		$8,75$		$+\infty$
$-0,4x + 3,5$		$+$	0	$-$	
$e^{-0,1x}$		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\boldsymbol{40e^{-0,875}}$	$\searrow$	