Corrections Savoir Sd. 3

Corrigé Exercice 11

1) a. $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$

On a $\Delta = 1$; $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{3}{2}$

Du signe de a, ici négatif, à l'extérieur des racines

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

b. $g(x) = -4x^2 + 4x - 1$

On a $\Delta = 0$; $x_0 = \frac{1}{2}$ Du signe de a, ici négatif

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$-$	

c. $h(x) = x^2 + x + 1$

On a $\Delta = -3$ Pas de racines : le polynôme est de signe constant, celui de a, ici positif

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	

d. $i(x) = 2x^2 - 6x - 8$

On a $\Delta = 100$; $x_1 = 4$ et $x_2 = -1$

Du signe de a, ici positif, à l'extérieur des racines

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$i(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

2) a. $j(x) = -2x^2 + 4x + 6$

On a $\Delta = 64$; $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$

Du signe de a, ici négatif, à l'extérieur des racines

Donc j est **négative sur** $]-\infty\,;\,\mathbf{-1}] \cup [\mathbf{3}\,;\,+\infty[$ et **positive sur** $[\mathbf{-1}; \mathbf{3}]$

b. $k(x) = 4x^2 - 4x - 3$

On a $\Delta = 64$; $x_0 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{3}{2}$

Du signe de a, ici positif, à l'extérieur des racines

Donc k est **négative sur** $\left[-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right]$ et **positive sur** $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2};\, +\infty\right[$

$F(x) = -12x^2 + 2x - \frac{1}{12}$

On a $\Delta = 0$; $x_0 = \frac{1}{12}$ Du signe de a, ici négatif

x	$-\infty$		$\frac{1}{12}$		$+\infty$
$F(x)$		$-$	$\mathbf{0}$	$-$	

$G(x) = \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{10}{3}$

On a $\Delta = \frac{49}{9}$; $x_1 = -2$ et $x_2 = 5$

Du signe de a, ici positif, à l'extérieur des racines

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$G(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

Corrigé Exercice 12

a. $2x^2 + 3x - 5 \geq 0$

On a $\Delta = 49$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{5}{2}$

Du signe de a, ici positif, à l'extérieur des racines

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2 + 3x - 5$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

$S = \left]-\infty; -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right] \cup [\mathbf{1};\, +\infty[$

b. $6 - 3x > 3x^2 \iff 3x^2 + 3x - 6 < 0$

On a $\Delta = 81$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

Du signe de a, ici positif, à l'extérieur des racines

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$3x^2 + 3x - 6$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

$S =]\mathbf{-2}; \mathbf{1}[$

c. $9x^2 - 6x \leq -1 \iff 9x^2 - 6x + 1 \leq 0$
On a $\Delta = 0$; $x_0 = \frac{1}{3}$
Du signe de a, ici positif

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$9x^2 - 6x + 1$		$+$	$\mathbf{0}$	$+$	

$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ (partout positif, on veut les négatifs ou les zéros… ne reste que le zéro)

d. $2x^2 + 1 > -x \iff 2x^2 + x + 1 > 0$
On a $\Delta = -7$ Du signe de a, ici positif

x	$-\infty$		$+\infty$
$2x^2 + x + 1$		$+$	

$S = \mathbb{R}$ (elle est partout positive et on veut les positifs)

a. $2x^2 - 7x + 3 \leq x^2 - 2x + 9$
$\iff x^2 - 5x - 6 \leq 0$
On a $\Delta = 49$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -6$
Du signe de a, ici positif, à l'extérieur des racines

x	$-\infty$		-6		1		$+\infty$
$2x^2 - 7x + 3$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

$S =]-\infty; \mathbf{-6}] \cup [\mathbf{1}; +\infty[$

b. $x^2 < \frac{1}{6}(x+5) \iff x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{5}{6} < 0$
Pour les équations et les inéquations, une bonne façon de se « débarrasser » des fractions, c'est de multiplier chaque terme par un facteur bien choisi : Ici, par exemple par 6 $\iff$
$6x^2 - 6 \times \frac{1}{6}x - 6 \times \frac{5}{6} > 6 \times 0$
$\iff 6x^2 - x - 5 > 0$
On a $\Delta = 121$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{5}{6}$
Du signe de a, ici positif, à l'extérieur des racines

x	$-\infty$		$-\frac{5}{6}$		1		$+\infty$
$2x^2 - 7x + 3$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

$S = \left]-\frac{5}{6}; \mathbf{1}\right[$

Corrigé Exercice 13

a. $A = (6 + x - x^2)(5x - 5)$
Pour $-x^2 + x + 6$ on a $\Delta = 25$
$avec$ $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$
Du signe de a à l'extérieur des racines, ici négatif

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$-x^2 + x + 6$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$5x - 5$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
A		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

b. $B = -3(x + 4)(x^2 - 7x + 6)$
Pour $x^2 - 7x + 6$ on a $\Delta = 25$
$avec$ $x_1 = 1$ et $x_2 = 6$
Du signe de a à l'extérieur des racines, ici positif

x	$-\infty$		-4		1		6		$+\infty$
-3		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	
$x + 4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x^2 - 7x + 6$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
B		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	

c. $C = \dfrac{5-x}{x^2(-x^2+4x-5)}$
Pour $x^2 + 4x + 5$ on a $\Delta = -4$
Pas de racines
Du signe de a partout, ici négatif

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$5 - x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
x^2		$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x^2 + 4x + 5$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	
A		$-$	$\Vert$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	

Corrigé Exercice 14

a. $\frac{3-x^2-2x}{x-1} \leq 0$

Pour $-x^2 - 2x + 3$ on a $\Delta = 16$

$avec\ x_1 = -3$ et $x_2 = 1$

Du signe de a à l'extérieur des racines, ici négatif

$\boldsymbol{S} = [\mathbf{-3}; \mathbf{1}[$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$-x^2 - 2x + 3$	$-$	0 $+$	0 $-$	
$x - 1$	$-$	$\mid$ $-$	0 $+$	
Quotient	$+$	$\mathbf{0}$ $-$	$\Vert$ $+$	

b. $(2x-1)(2+x) \geq x(x-1)$

Pas de factorisation en vue, on développe

$\Leftrightarrow 4x + 2x^2 - 2 - x \geq x^2 - x$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 2 \geq 0$

on a $\Delta = 24$ avec $x_1 = \frac{-4-\sqrt{24}}{2} = -2 - \sqrt{6}$

et $x_2 = -2 + \sqrt{6}$

Du signe de a à l'extérieur des racines, ici positif

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{6}$	$-2+\sqrt{6}$	$+\infty$
$x^2 + 4x - 2$	$+$	$\mathbf{0}$ $-$	$\mathbf{0}$ $-$	

$\boldsymbol{S} =]-\infty;\ \mathbf{-2} - \sqrt{\mathbf{6}}[\cup] - \mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{6}};\ +\infty[$

c. $\frac{3x}{-2x+2} < \frac{x-3}{x+7}$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{-2x+2} - \frac{x-3}{x+7} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x(x+7) - (-2x+2)(x-3)}{(-2x+2)(x+7)} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 21x - (-2x^2 + 6x + 2x - 6)}{(-2x+2)(x+7)} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{5x^2 + 13x + 6}{(-2x+2)(x+7)} < 0$

Pour $5x^2 + 13x + 6$ on a $\Delta = 49$; $x_1 = -\frac{3}{5}$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$	-7	-2	$-\frac{3}{5}$	1	$+\infty$
$5x^2 + 13x + 6$	$+$	$\mid$ $+$	0 $-$	0 $+$	$\mid$ $+$	
$-2x + 2$	$+$	$\mid$ $+$	$\mid$ $+$	$\mid$ $+$	0 $-$	
$x + 7$	$-$	0 $+$	$\mid$ $+$	$\mid$ $+$	$\mid$ $+$	
Quotient	$-$	$\Vert$ $+$	$\mathbf{0}$ $-$	$\mathbf{0}$ $+$	$\Vert$ $-$	

$\boldsymbol{S} =]-\infty;\ \mathbf{-7}[\cup] - \mathbf{2};\ -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}[\ \cup]\mathbf{1};\ +\infty[$

Corrigé Exercice 15

1) Pour $\alpha = 0$, le terme αx^2 s'annule et on a $R_0(x) = -2x + 2$ qui est un polynôme du 1[er] degré

2) Pour $\alpha \neq 0$, on a $\Delta = \left(-2(\alpha+1)\right)^2 - 4\alpha(\alpha+2) = 4(\alpha^2 + 2\alpha + 1) - 4\alpha^2 - 8\alpha = \mathbf{4}$

Alors $x_1 = \frac{2(\alpha+1)-2}{2\alpha} = \frac{2\alpha+2-2}{2\alpha} = 1$ et $x_2 = \frac{2(\alpha+1)+2}{2\alpha} = \frac{2\alpha+4}{2\alpha} = \frac{\alpha+2}{\alpha}$

On a donc comme racines 1 et $\boldsymbol{\frac{\alpha+2}{\alpha}}$

3) Si $\alpha < 0$, alors $\frac{\alpha+2}{\alpha}$=$1 + \frac{2}{\alpha} < 1$.

Le polynôme R_α est du signe de α à l'extérieur de ses racines, donc ici négatif.

x	$-\infty$	$\frac{\alpha+2}{\alpha}$	1	$+\infty$
$R_\alpha(x)$	$-$	$\mathbf{0}$ $+$	$\mathbf{0}$ $-$	