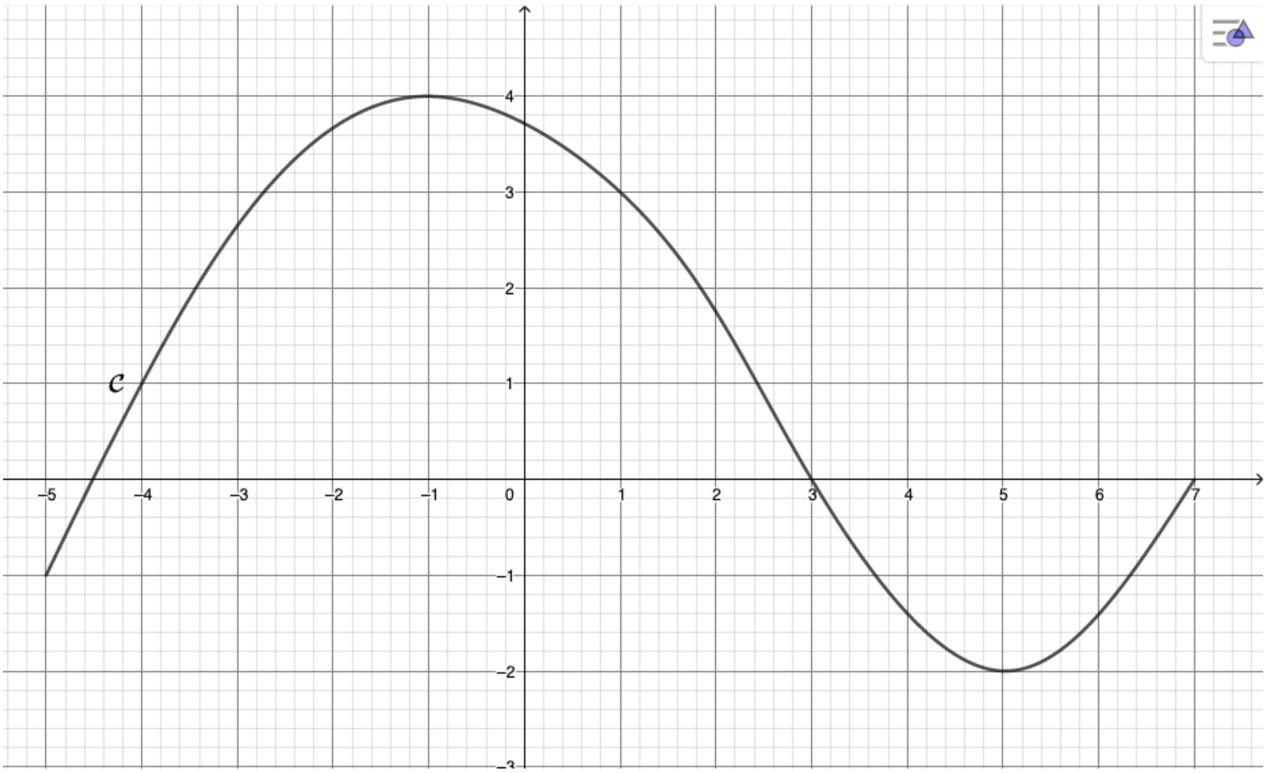
Sujet n°1

Exercice n°1

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 7]$.



Partie A : Fonction f

1. Par simple lecture graphique, donner :

(a) l'image de -2 par f **(b)** $f(4)$ **(c)** les antécédents de 0 par f

(d) les solutions de $f(x) = 1$ **(e)** Le minimum de f sur $\mathcal{D}_f$ **(f)** le maximum de f pour $x \in [1; 6]$

2. (a) Construire le tableau de variation de f sur $[-5; 7]$

(b) Recopier et compléter l'encadrement : pour $[-4\ ;\ 2]$, $\ldots \leq f(x) \leq \cdots$

Partie B : Fonction g

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x + 3$

1. (a) Construire le tableau de variation complet de g sur $[-5; 7]$

(b) Déterminer par le calcul l'antécédent de 12 par g

2. (a) Tracer sur le graphique la courbe représentative de g. Détailler votre démarche.

(b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$

Partie C : Fonction h

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2x^2 - 4x + 3$

1. Calculer les valeurs exactes de $h(-1)$ et $h\left(\frac{1}{2}\right)$

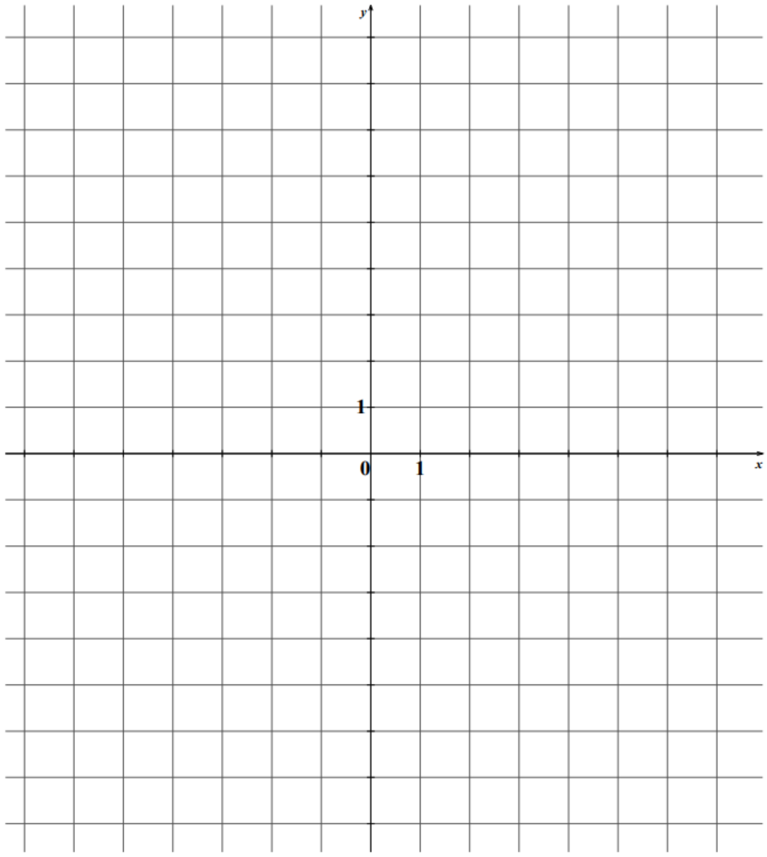
2. Le point $A(3; 9)$ appartient-il à la courbe représentative de la fonction h ? Justifier.

3. Montrer que : $h(x) - g(x) = (x-1)(2x-1) - 1$

Exercice n° 2

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points :

$A(-3\,;2)$, $B(3\,;4)$ et $C(5;-2)$.



1. Placer les points A, B et C dans le repère ci-contre (on complétera la figure au fur et à mesure)

2. Calculer les coordonnées du point M milieu du segment $[AC]$.

3. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$

4. Calculer la valeur exacte de la longueur BC.

5. **(a)** Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

(b) Quelle est la nature de $ABCD$?

6. On donne $AB = \sqrt{40}$ et $AC = \sqrt{80}$.
Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

Exercice n°3

Vous ne le savez peut-être pas, mais il existe une épreuve de mathématiques aux Jeux Olympiques*.

Partie A : Inscriptions

Les participants peuvent s'inscrire sous deux statuts : soit en tant que « diplômé de maths », soit en tant que « non diplômé de maths ».
Ils doivent ensuite s'inscrire dans un des niveaux possibles : « Amateurs », « Confirmés » ou « Experts ».
Il y a eu 8 000 inscrits aux jeux olympiques de maths de 2020, avec parmi eux, 2400 le sont en tant que « diplômés de maths ».
Seulement 10 % d'entre eux sont inscrits comme « Experts » dont les trois quarts sont « Diplômés ».
40% des inscrits le sont comme « confirmés ».
Il n'y a que 160 inscrits à la fois « diplômés » et « amateur ».

On choisit un participant au hasard.
On définit les évènements suivants :
D : le participant est diplômé de maths
A : le participant est inscrit comme « Amateur »
C : le participant est inscrit comme « Confirmé »
E : le participant est inscrit comme « Expert »

	A	C	E	Total
D				
$\overline{D}$				
Total				1

1. Compléter le tableau de **probabilités** ci-contre.

2. **(a)** Quelle est la probabilité que ce participant ne soit pas un amateur ?

(b) Déterminer $p(D \cap C)$ et interpréter dans le contexte.

3. Quelle est la probabilité que ce participant soit un expert ou un diplômé de maths ?

4. On sait que le participant est un amateur. Quelle est alors la probabilité qu'il soit diplômé de maths ?

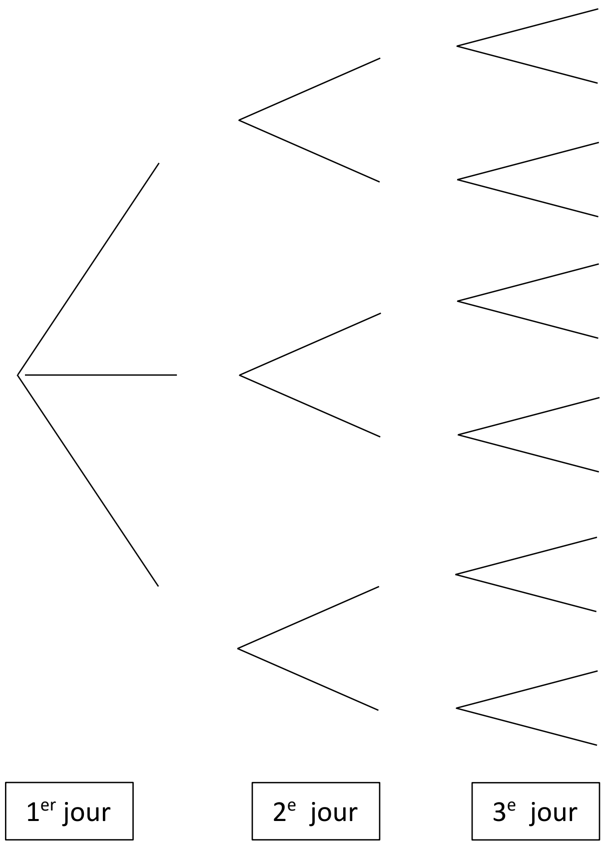
Partie B : Épreuves

Il y a 3 épreuves, une par jour pendant 3 jours. Pour chaque épreuve, les participants choisissent au hasard une énigme.
Le 1er jour, les participants peuvent tomber sur une énigme de probabilité, de géométrie ou de calcul.
Le 2e jour, ils peuvent tomber sur une énigme de probabilité ou de géométrie.
Le 3ème jour, c'est soit une énigme de probabilité, soit de calcul.

On définit les évènements suivants :

P : le participant a une énigme de probabilités
G : le participant a une énigme de géométrie
C : le participant a une énigme de calcul

1. L'arbre ci-dessous représente les différents choix possibles au 1er, 2e et 3e jour. On regarde, à la fin des 3 épreuves, les énigmes obtenues par le candidat.
Compléter l'arbre et donner toutes les issues possibles



2. (a) Quelle est la probabilité qu'un candidat obtiennent 2 sujets de géométrie ?

(b) Quelle est la probabilité qu'un candidat obtiennent au moins 2 sujets de probabilités ?

3. Calculer $p(P \cap C)$ et interpréter dans le contexte

Donner les probabilités sous la forme d'une fraction irréductible

Exercice n°4

On donne les expressions littérales $A = 2 + 6x(3 - x)$ et $B = (5 - 2x)(3x + 1)$

1. (a) Développer et réduire A **(b)** Développer et réduire B

2. (a) Développer et réduire $A - B$ **(b)** Résoudre $A = B$

3. Calculer la valeur exacte de B quand $x = -\frac{1}{3}$

CORRECTIONS - Sujet n°1

Corrigé Exercice n°1

Partie A

1. **(a)** L'image de -2 par f est **3,7**

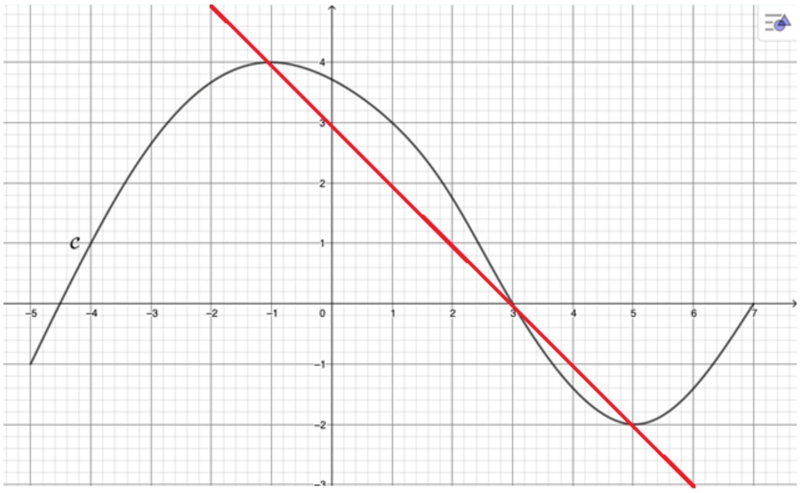
(b) $f(4) = \mathbf{-1,4}$

(c) Les antécédents de 0 par f sont $\mathbf{-4,5}$ **;** $\mathbf{3}$ **et** $\mathbf{7}$

(d) $S = \{\mathbf{-4}\,;\mathbf{2,4}\}$

(e) Le minimum est $\mathbf{-2}$

(f) Sur $[1;6]$ le maximum est $\mathbf{3}$



2. (a)

x	-5		-1		5		7
$f(x)$	$\mathbf{-1}$	↗	$\mathbf{4}$	↘	$\mathbf{-2}$	↗	$\mathbf{0}$

(b) $\mathbf{1} \leq f(x) \leq \mathbf{4}$

Partie B

1. **(a)** le coefficient directeur est -1 donc négatif,
la fonction est décroissante.
On calcule $g(-5) = -(-5) + 3 = 8$ et $g(7) = -7 + 3 = -4$

x	-5		7
$g(x)$	$\mathbf{8}$	↘	$\mathbf{-4}$

(b) $g(x) = 12$
$\Leftrightarrow \quad -x + 3 = 12$
$\Leftrightarrow \quad -x = 12 - 3$
$\Leftrightarrow \quad -x = 9$
$\Leftrightarrow \quad x = -9$
L'antécédent de 12 par g est -9

2. (a) Sur le graphique, en utilisant 2 points minimum du tableau de valeurs (après on sort du cadre):

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	3	2	1	0	-1	-3

(b) Abscisses des points d'intersection des 2 fonctions : $S = \{\mathbf{-1}\,;\ \mathbf{3};\ \mathbf{5}\}$

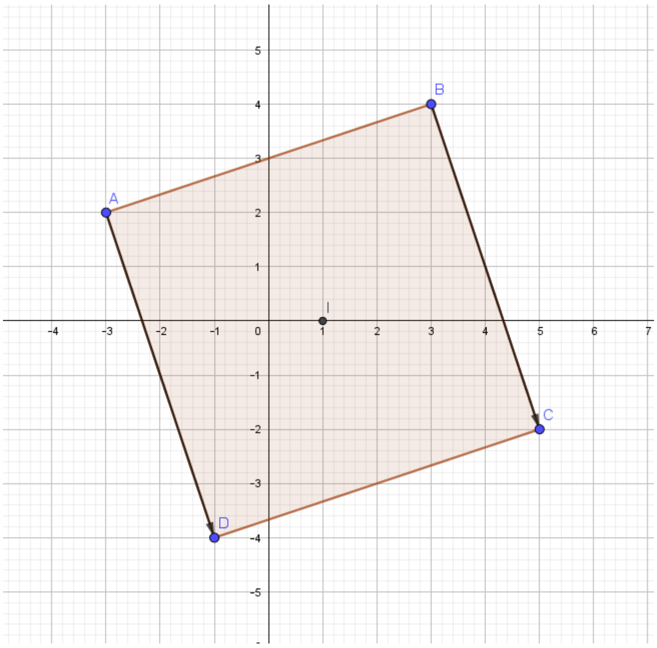
Partie C

1) $h(-1) = 2 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 3 = 2 + 4 + 3 = \mathbf{9}$ $\quad h\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{4} - 4 \times \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 1 = \mathbf{\frac{5}{4}}$

2) $h(3) = 18 - 12 + 3 = 9$ Donc **le point A appartient à la courbe représentative de h.**

3) D'une part, on a : $h(x) - g(x) = (2x^2 - 4x + 3) - (-x + 3) = 2x^2 - 4x + 3 + x - 3 = 2x^2 - 3x$.
D'autre part, on a : $(x - 1)(2x - 1) - 1 = 2x^2 - x - 2x + 1 - 1 = 2x^2 - 3x$.
On a donc bien : $\boldsymbol{h(x) - g(x) = (x - 1)(2x - 1) - 1.}$

Corrigé Exercice n°2



1) $\Rightarrow$

2) $\frac{x_A+x_C}{2} = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $\frac{y_A+y_C}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = 0$

Le milieu de $[AC]$ a pour coordonnées $M(\mathbf{1}\ ;\mathbf{0})$, c'est aussi le point I.

3) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C-x_B \\ y_C-y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-6} \end{pmatrix}$

4) $BC = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}$

$BC = \sqrt{(2)^2+(-6)^2}$

$BC = \sqrt{4+36} = \sqrt{\mathbf{40}}$

5) (a) $\Rightarrow$

(b) L'égalité vectorielle $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ permet de dire que ABCD est un **parallélogramme**.

6) Comme $AB = BC = \sqrt{40}$, ABC est isocèle en B.

D'une part : $AC^2 = \left(\sqrt{80}\right)^2 = 80$

D'autre part : $AB^2 + BC^2 = \left(\sqrt{40}\right)^2 + \left(\sqrt{40}\right)^2 = 40 + 40 = 80$

On a $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **$\boldsymbol{ABC}$ est rectangle en $\boldsymbol{B}$.**

Corrigé Exercice n°3

Partie A **1.** (il n'est pas nécessaire de donner les calculs, c'est pour expliquer)

	A	C	E	Total
D	$\frac{160}{8000} = \mathbf{0,02}$	$0{,}3-0{,}02-0{,}075 =$ $\mathbf{0,205}$	$\frac{3}{4}\times 0{,}1 =$ $\mathbf{0,075}$	$\frac{2400}{8000} = \mathbf{0,3}$
$\overline{D}$	$0{,}5-0{,}02 =$ $\mathbf{0,48}$	$0{,}4-0{,}205 =$ $\mathbf{0,195}$	$1-0{,}075 =$ $\mathbf{0,025}$	$1-0{,}3$ $\mathbf{0,7}$
Total	$1-0{,}4-0{,}1 =$ $\mathbf{0,5}$	$\mathbf{0,4}$	$\mathbf{0,1}$	$\mathbf{1}$

2. (a) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}5 = \mathbf{0,5}$ **Il y a 50 % de chances que ce participant ne soit pas un amateur**

(b) $p(D \cap C) = \mathbf{0,205}$ **Il y a 20,5 % de chances que ce participant soit diplômé et confirmé**

3. $p(E \cap D) = p(E) + p(D) - p(E \cap D) = 0{,}1 + 0{,}3 - 0{,}075 = \mathbf{0,325}$

Il y a 32,5 % de chances que ce participant soit un expert ou un diplômé de maths

4. $p(D\ parmi\ A) = \frac{0{,}02}{0{,}5} = \mathbf{0,04}$ **Si c'est un amateur, il y a alors 4 % de chances que ce soit un diplômé**

Partie B

1. Voir après

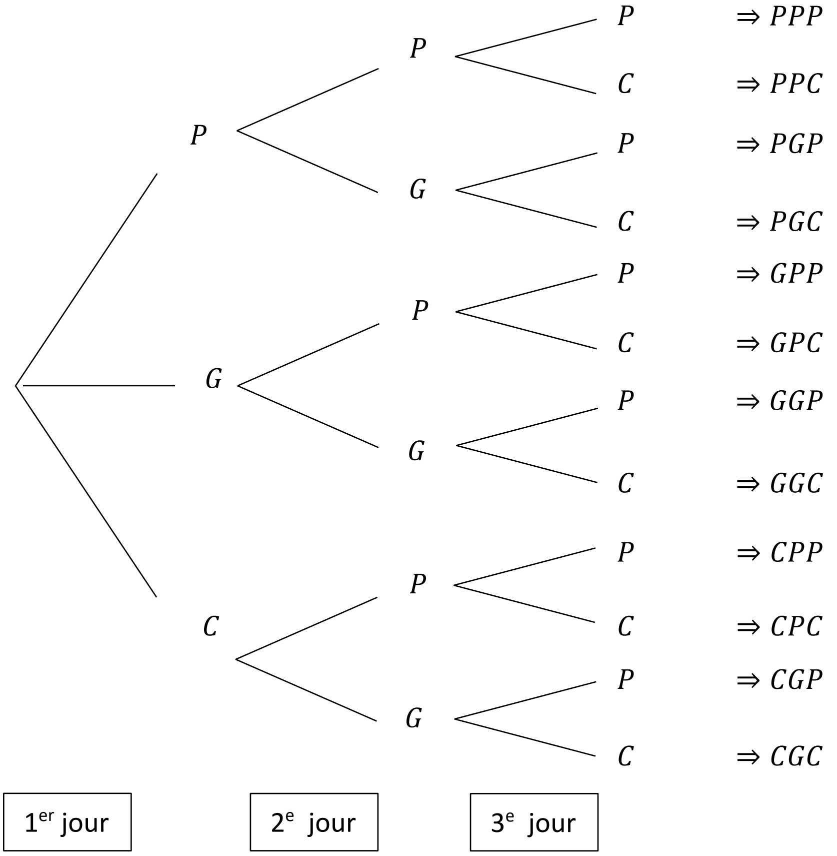
2. (a) Il y a 12 issues en tout, et 2 issues avec 2 sujets de géométrie : GGP et GGC

$p(2G) = \frac{2}{12} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$ **Il y a une chance sur 6 qu'un candidat obtiennent 2 sujets de géométrie**

(b) Les issues concernées sont $\{PPP ; PPC ; PGP ; GPP ; CPP\}$ soit 5 issues $p(\geq 2P) = \frac{5}{12}$

5 chances sur 12 qu'un candidat obtiennent au moins 2 sujets de probabilités

3. On a $P \cap C = \{PPC\,;PGC\,;GPC\,;CPP\,;CPC\,;CGP\}$ soit 6 issues : $p(P \cap C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$
Il y a 1 chance sur 2 que le candidat ait un sujet de proba et un sujet de calcul au cours des 3 jours.



Corrigé Exercice n°4

1. (a) $A = 2 + 6x(3 - x) = 2 + 18x - 6x^2 = -6x^2 + 18x + 2$

(b) $B = (5 - 2x)(3x + 1) = 15x + 5 - 6x^2 - 2x = -6x^2 + 13x + 5$

2. (a)
$$\begin{aligned} A - B &= (-6x^2 + 18x + 2) - (-6x^2 + 13x + 5) \\ &= -6x^2 + 18x + 2 + 6x^2 - 13x - 5 \\ &= 5x - 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow -6x^2 + 18x + 2 = -6x^2 + 13x + 5 \\ &\Leftrightarrow -6x^2 + 6x^2 + 18x - 13x = 5 - 2 \\ &\Leftrightarrow 5x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{5} \quad \text{donc } S = \left\{\boldsymbol{\frac{3}{5}}\right\} \end{aligned}$$

3. $B = -6x^2 + 13x + 5 = -6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 13 \times \frac{1}{13} + 5 = -\frac{6}{9} + \frac{13}{3} + \frac{15}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{28}{3} = \boldsymbol{\frac{26}{3}}$