Corrigé Sujet n°3

Corrigé Exercice 9

Partie I :

1. case B3 : « $=\mathrm{B2}-\ln(\mathrm{B2}-1)$ »

2. Il semble que la suite converge vers 2

Partie II :

1. On a $\lim\limits_{x\to 1^+} x-1=0^+$ et $\lim\limits_{y\to 0^+}\ln y=-\infty$ donc par composée de limites, on a $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(x-1)=-\infty$
Par conséquent, on a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1-\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(x-1)=+\infty$

2. a. $f'(x)=1-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$

b. Donc, avec $f(2)=2-\ln(2-1)=2-\ln 1=2$

x	1		2		$+\infty$
$x-2$	|	$-$	0	$+$	
$x-1$	0	$+$	|	$+$	
$h'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

c. La fonction f a pour minimum 2,
donc on a bien $f(x)\geq 2$ pour tout $x\in]1;+\infty[$
et en particulier pour tout $x\geq 2$.

Partie III :

1. <u>Initialisation</u> : pour $n=0$, $u_0=10$ on a bien $u_0\geq 2$: la propriété est **vraie pour $\boldsymbol{n=0}$**

<u>Hypothèse de récurrence</u> : on suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $\boldsymbol{u_p\geq 2}$

<u>Hérédité</u> : On a montrée que pour $x\geq 2$, on a $f(x)\geq 2$, donc, en particulier, pour $u_p\geq 2$, on a $f(u_p)\geq 2$
C'est-à-dire $\boldsymbol{u_{p+1}\geq 2}$
Donc la propriété est aussi vraie pour $\boldsymbol{p+1}$: elle est héréditaire

<u>Conclusion</u> : pour tout entier naturel n on a : $\boldsymbol{u_n\geq 2}$

2. On a : $u_{n+1}-u_n=u_n-\ln(u_n-1)-u_n=-\ln(u_n-1)$
or, comme $u_n\geq 2$ alors $u_n-1\geq 1$ et $\ln(u_n-1)\geq \ln 1$ $\Rightarrow \ln(u_n-1)\geq 0$ mais $-\ln(u_n-1)\leq 0$
On a donc, pour tout n, $u_{n+1}-u_n\leq 0 \Leftrightarrow u_{n+1}\leq u_n$: **la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est bien décroissante**

(démonstration par récurrence possible)

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2 : d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est donc **convergente**.

4. $f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \ell-\ln(\ell-1)=\ell \Leftrightarrow \ln(\ell-1)=0 \Leftrightarrow \ell-1=1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\ell=2}$

Corrigé Exercice 10

Partie 1

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^+$ donc par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$
Et par conséquent $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 1 + \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty$

On a $h(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 1 + \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$
Or, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
Et comme on a $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, par produit de limites, on obtient $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x} = 0$.
Au final, $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = 1 + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x} = 1$

2. $h'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln(x)}{(x^2)^2} = \dfrac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{x(1 - 2\ln(x))}{x \times x^3} = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$ $\quad CQFD$

3. on a $1 - 2\ln(x) \geq 0 \iff 2\ln(x) \leq 1 \iff \ln(x) \leq \dfrac{1}{2} \iff x \leq e^{\frac{1}{2}}$

Avec $h\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 1 + \dfrac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = 1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{e^1} = 1 + \dfrac{1}{2e}$

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$1 - 2\ln(x)$	|	$+$	0	$-$	
x^3	0	$+$	|	$+$	
$h'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1 + \frac{1}{2e}$	$\searrow$	1

4. Sur $\left[e^{\frac{1}{2}};\ +\infty\right[$, la fonction h est strictement supérieur à 1, donc l'équation $h(x) = 0$ n'y a pas de solution.
Sut $\left]0; e^{\frac{1}{2}}\right]$, la fonction h est continue et croissante, et $0 \in \left]-\infty; 1 + \frac{1}{2e}\right]$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ y admet une unique solution α .
L'équation $h(x) = 0$ n'a bien qu'une seule solution dans $]0\ ;\ +\infty[$.

On a $h\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -1{,}77$ et $h(1) = 1 + \frac{\ln(1)}{1^2} = 1$ donc on a bien : $\boldsymbol{\frac{1}{2} < \alpha < 1}$.

5.

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	||	$-$	0	$+$	

Partie 2

1. $f_1(x) - f_2(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} - \left(x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}\right) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} - x + 2 + \frac{2\ln(x)}{x^2} = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2} = h(x)$

2. Pour $x \in]0; \alpha]$, $f_1(x) - f_2(x) \leq 0$ donc $f_1(x) \leq f_2(x)$: la courbe $\mathcal{C}_1$ est en dessous de $\mathcal{C}_2$ sur $]0; \alpha]$
Pour $x \in [\alpha;\ +\infty[$, $f_1(x) - f_2(x) \geq 0$ donc $f_1(x) \geq f_2(x)$: la courbe $\mathcal{C}_1$ est au dessus de $\mathcal{C}_2$ sur $[\alpha;\ +\infty[$
Il n'y a donc qu'un seul point d'intersection, d'abscisse α et d'ordonnée :

$$f_1(\alpha) = \alpha - 1 - \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} = \alpha - \left(1 + \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2}\right)$$

or, comme α est défini tel que $h(\alpha) = 0 \iff 1 + \frac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} = 0$, on a $f_1(\alpha) = \alpha$

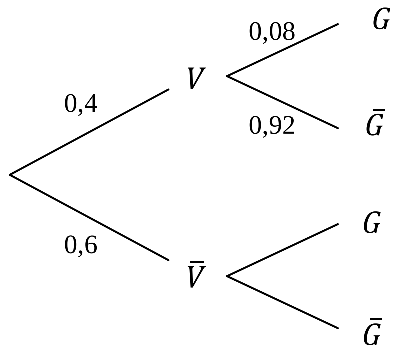
L'unique point d'intersection a bien pour coordonnées $(\boldsymbol{\alpha}\ ;\ \boldsymbol{\alpha})$.

Corrigé Exercice 11

Partie A

1. a. $P(G) = 0{,}2$

b. $\Rightarrow$



2. $p(V \cap G) = p(V) \times p_V(G) = 0{,}4 \times 0{,}08 = \mathbf{0{,}032}$
La probabilité qu'elle ait la grippe et soit vaccinée est de 3,2 %

3. $p_{\bar{V}}(G) = \frac{p(\bar{V} \cap G)}{p(\bar{V})} = \frac{p(G) - p(V \cap G)}{p(\bar{V})} = \frac{0{,}2 - 0{,}032}{0{,}6} = \frac{0{,}168}{0{,}6} = \mathbf{0{,}28}$ CQFD

Partie B

1. Il s'agit d'une répétition de n expériences identiques correspondant à un schéma de Bernoulli (avec une probabilité de succès de 0,4), indépendantes entre elles.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc une **loi binomiale de paramètres $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p = 0{,}4}$**

2. a. $P(X = 15) = \binom{40}{15} \times 0{,}4^{15} \times 0{,}6^{25} \simeq \mathbf{0{,}123}$
La probabilité qu'exactement 15 personnes soient vaccinées est d'environ 12,3 %

b. $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) \simeq \mathbf{0{,}130}$
Il y a environ 13 % de chances qu'au moins la moitié des personnes soit vaccinées

3. On cherche n tel que $P(Y \geq 20) \geq 0{,}75$ où Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0{,}4)$
À la calculatrice, en choisissant n pour inconnue avec la fonction $1 - P(Y \leq 19)$ on obtient :
Pour $n = 54$, $P(Y \geq 20) \simeq 0{,}718$ et pour $n = 55$, $P(Y \geq 20) \simeq 0{,}753$

Corrigé Exercice 12

1. On a $H(1;1;1)$ donc $\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc la droite (BH) passant par B a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = t\,, \ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

2. On a $D(1;1;0)$; $E(1;0;1)$ et $G(0;1;1)$ donc $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{DE} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$ donc $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DE}$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{DG} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$ donc $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DG}$

Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (DEG), **il est donc normal à ce plan, et (BH) est perpendiculaire au plan $(\boldsymbol{DEG})$**

3. Le plan (DEG) a une équation cartésienne du type $x + y + z + d = 0$ et comme, par exemple, il passe par le point D, on a $x_D + y_D + z_D + d = 0 \iff 1 + 1 + 0 + d = 0 \iff d = -2$

On a donc une équation cartésienne du plan (DEG) : $\boldsymbol{x + y + z - 2 = 0}$

4. On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).

Déduire des questions précédentes les coordonnées du point P.

On résout $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \\ t + t + t - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$ donc on a $\boldsymbol{P\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)}$

5. On a $PG = \sqrt{\left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ On montre de même que $PE = PD = PG = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Le point P est donc équidistant aux trois sommets du triangle DEG, c'est donc **le centre du cercle circonscrit au triangle DEG.**

Mais comme le triangle est équilatéral, il s'agit aussi de son **centre de gravité et de son orthocentre.**

C'est à partir de 55 personne interrogées qu'on aura 75 % de chances d'en avoir au moins 20 vaccinées