

Corrigés Savoirs Fle. 1

Corrigé Exercice 1

- 1) • a) $\frac{1}{e}$ b) $\frac{1}{e^{3x}}$ c) $\frac{1}{e^{-x+4}}$ d) $\frac{1}{e^{x+1}}$
 • h) e^{-2x} i) e^{-2} j) e^{2x+1} k) e^{-x+4}
- 2) • a) $e^{3x} \times e^2$ b) $\frac{e}{e^{3x}}$ c) $e^{x^2} e^x$ d) $\frac{e^x}{e^{3x^2}}$
 • h) e^{x+2} i) e^{2x-1} j) $e^{x^2-1+2-x} = e^{x^2-x+1}$
 k) $e^{x-3-4-x} = e^{-7} = \frac{1}{e^7}$
- 3) • a) $(e^x)^2$ b) $(e^{x^2})^3$ c) $(e^{-1})^3 = \left(\frac{1}{e}\right)^3 = \frac{1}{e^3}$
 d) $e^{3(x+1)} = (e^{x+1})^3$
 • h) e^{5x} i) $e^{3(x+2)} = e^{3x+6}$ j) e^{-2x} k) $16e^{2x}$

Un peu plus...

- e) $\frac{1}{e^2}$ f) $\frac{1}{e^x}$ g) $\frac{1}{e^{-1+2x}}$
 • l) e^{-3} m) e^{-x-2} n) $e^{0,5x-1}$
- e) $e^{4x} e^{-1} = \frac{e^{4x}}{e}$ f) $e^{x^2} e^2$ g) $\frac{e}{e^x}$
 • l) $e^{x+2x} = e^{3x}$ m) e^{x-2x^2}
 n) $e^{x+2+3-x} = e^5$
- e) $(e^x)^{-3} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^3$ f) $(e^{x^2})^{0,5} = \sqrt{e^{x^2}}$
 g) $e^{2(x+2)} = (e^{x+2})^2$
- l) $e^{-4x} = \frac{1}{e^{4x}}$ m) $e^{3(4-x)} = e^{12-3x}$
 n) e^{6x}

Corrigé Exercice 2

$$E = e^3$$

$$F = e^{x+2-2} = e^x$$

$$G = e^x \times e^1 = e^{x+1}$$

$$H = e^{x+x-1} = e^{2x-1}$$

$$I = \frac{e^{-4}}{e^{-6}} = e^2$$

$$J = e^{x+2+x} = e^{2x+2}$$

$$K = e^{x-1+x} = e^{2x-1}$$

$$M = \frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{e^x}{e^x} = \frac{(e^x)^2}{e^x} + 1 = e^x + 1$$

$$L = e^{3x} e^{-4x} = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$N = e^{2x-1-3x+2} = e^{-x+1}$$

$$P = e^{-3x^2}$$

Un peu plus...

$$A = e^{3x-1-x+3} = e^{2x+2}$$

$$B = 8e^{3x-3x} = 8e^0 = 8$$

$$C = e^{-4x-2(2-3x)} = e^{2x-4}$$

Corrigé Exercice 3

$$1) f(x) = 3e^0 + e^{4x} = 3 + e^{4x}$$

$$g(x) = e^{-x} e^x - e^{-x} + e^x - 1 \\ = e^0 - e^{-x} + e^x - 1 \\ = e^x - e^{-x}$$

$$h(x) = e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} \\ - e^{-2x} \\ = 2$$

$$i(x) = e^{2x} + 2e^x + 1 \\ - (e^{-2x} - 2e^{-x} + 1) \\ = e^{2x} - e^{-2x} + 2e^x + 2e^{-x}$$

Un peu plus...

$$1) j(x) = e^{2x} + 2 + e^{-2x} \\ - (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \\ = 4 \\ k(x) = e^{3x} + e^{2x} + e^x - e^x \\ - e^0 - e^{-x} \\ = e^{3x} + e^{2x} - 1 - e^{-x}$$

$$2) E = (e^x)^2 + 3e^x = e^x(e^x + 3)$$

$$F = e^x(4e^x + 4 + e^{-x})$$

$$G = (e^x)^2 - 1 = (e^x + 1)(e^x - 1)$$

$$H = e^x(x - e^{2x})$$

$$2) a(x) = e^{-2x}(2e^{-x} - 1)$$

$$b(x) = xe^x(x - 3e^x)$$

Corrigé Exercice 4

$$\begin{aligned}
 1) \text{ a. } B^2 - 2A &= \left((x+1)e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 - 2(xe^{-x}) = (x+1)^2 e^{-2 \times \frac{x}{2}} - 2xe^{-x} \\
 &= (x^2 + 2x + 1)e^{-x} - 2xe^{-x} = (x^2 + 2x + 1 - 2x)e^{-x} \\
 &= (x^2 + 1)e^{-x} = -x = \frac{x^2 + 1}{e^x} \quad \text{CQFD}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } f(x) &= e^x + e^{2x} \text{ et } g(x) = e^x - e^{-2x} \\
 f(x) - g(x) &= e^x + e^{2x} - (e^x - e^{-2x}) = e^x + e^{2x} - e^x + e^{-2x} \\
 &= e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} = \frac{e^{4x}}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}} = \frac{1+e^{4x}}{e^{2x}}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'une part } f(x)g(x) = (e^x + e^{2x})(e^x - e^{-2x}) = e^{2x} - e^{-x} + e^{3x} - 1$$

$$\text{Et d'autre part } \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)(e^{3x} - 1) = e^{3x} - 1 + \frac{e^{3x}}{e^x} - \frac{1}{e^x} = e^{3x} - 1 + e^{2x} - e^{-x}$$

$$\text{On a bien } f(x)g(x) = \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)(e^{3x} - 1)$$

2) on multiplie numérateur et dénominateur par e^x :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{e^x - \frac{1}{e^x}} = \frac{e^x(e^x + \frac{1}{e^x})}{e^x(e^x - \frac{1}{e^x})} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

Un peu plus...

$$\begin{aligned}
 1) \text{ On a } A + 1 &= \frac{e^x}{1-e^x} + 1 \\
 &= \frac{e^x + 1 - e^x}{1-e^x} = \frac{1}{1-e^x}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{A+1} = 1 - e^x$$

$$\begin{aligned}
 \text{Et } \left(\frac{1}{A+1}\right)^2 &= (1 - e^x)^2 \\
 &= 1 - 2e^x + e^{2x} \\
 &= e^x(e^{-x} - 2 + e^x)
 \end{aligned}$$

CQFD

$$\begin{aligned}
 2) \frac{1+e^{2x}}{1-e^x} &= \frac{1+(e^x)^2}{1-e^x} \\
 &= \frac{e^x(e^{-x} + e^x)}{e^x(e^x - 1)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - 1}
 \end{aligned}$$

Remarque : Il peut être plus simple, pour ne pas avoir à factoriser, de partir du deuxième membre de l'égalité, en multipliant

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - 1} = \frac{e^x(e^x + e^{-x})}{e^x(e^x - 1)} = \frac{e^{2x} + 1}{1 - e^x}$$

Corrigé Exercice 5

$$\text{On a } f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Donc, d'une part

$$\begin{aligned}
 1 + (f'(x))^2 &= 1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\
 &= 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}) \\
 &= 1 + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{2}{4} + \frac{1}{4}e^{-2x} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'autre part : } \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x}) \\
 &= \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x} \\
 &= 1 + (f'(x))^2 \quad \text{CQFD}
 \end{aligned}$$

Un peu plus...

$$\text{On a : } g'(x) = e^x - e^{-x} - 4$$

$$\text{Alors } g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} - 4 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{En multipliant par } e^x &\Leftrightarrow (e^x)^2 - e^0 - 4e^x = 0 \\
 &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

On pose $Y = e^x$ l'équation revient à

$$Y^2 - 4Y + 1 = 0 \text{ avec } \Delta = 20$$

$$\text{On a } Y_1 = \frac{4-\sqrt{20}}{2} = 2 - \sqrt{5} \text{ et } Y_2 = 2 + \sqrt{5}$$

$$\text{Soit } e^{x_1} = 2 - \sqrt{5} \text{ et } e^{x_2} = 2 + \sqrt{5}$$

La 1^{ère} équation est sans solution car $2 - \sqrt{5} < 0$

$$\text{Et } x_2 = \ln(2 + \sqrt{5})$$

$$\text{On a donc } S = \{\ln(2 + \sqrt{5})\}$$

Corrigé Exercice 6

$$(a_n) \text{ est arithmétique, donc } a_{n+1} = \frac{1}{2} + a_n$$

$$b_{n+1} = e^{-a_{n+1}} = e^{-\frac{1}{2} - a_n} = e^{-\frac{1}{2}} \times e^{-a_n} = e^{-\frac{1}{2}} b_n$$

donc (b_n) est bien une suite **géométrique** de raison $e^{-\frac{1}{2}}$ et de 1^{er} terme est $b_0 = e^{-2}$