

Sujet n°1: Des classiques

Exercice 1 - Amérique du nord 2024

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi.

L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.

Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

- la probabilité de tirer un objet rare est de 7%
- si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80%
- si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40%.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet.

On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare »;
- E l'évènement « le joueur tire une épée »;
- $\bar{R}$ et $\bar{E}$ les évènements contraires des évènements R et E .

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
2. Calculer la probabilité de tirer une épée.
3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare.
Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.

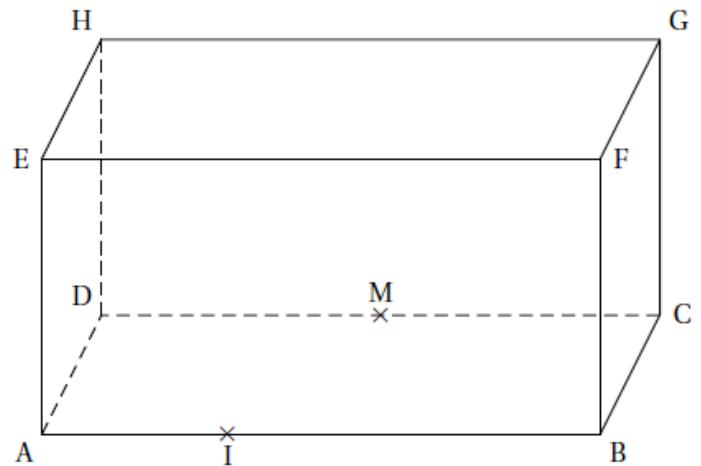
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X .
Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
2. Déterminer $P(X < 6)$. Arrondir le résultat au millième.
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geq k) \geq 0,5$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7%. Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à 0,95.
Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif.
On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.

Exercice 2 - Amérique du Nord 2024

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-contre.

On considère le point I du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et on appelle M le milieu du segment $[CD]$.
On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F , H et M .

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF) .

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :

$$2x + 6y + 3z - 9 = 0.$$

c. Le plan $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG) .

4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF) .
Déterminer les coordonnées du point N .

5. Le point R de coordonnées $\left(3; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ? Justifier la réponse.

Exercice 3 -

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.
Au 1^{er} janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison 0,93.

Pour tout entier naturel n , u_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année 2025+ n , exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 6 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = -0,05v_n^2 + 1,1v_n$$

Pour tout entier naturel n , v_n représente la population au 1^{er} janvier de l'année 2025+ n , exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1^{er} janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = -0,05x^2 + 1,1x$.

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 11]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.
4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ .
5. a. Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ .
b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.

Exercice 4 - Centres étrangers 2024

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] - \infty; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] - \infty; 1[$.

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

(...)

3. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] - \infty; 1[$, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$$

b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $] - \infty; 1[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $] - \infty; 1[$, on a :

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}$$

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $] - \infty; 1[$

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $] - \infty; 1[$, on a : $e^x \geq (-2x - 1)(x - 1)$.

5. a. Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .