Correction

Corrigé Sujet n°1

1. a. $g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x = x(x + 2)e^x$

Sur $[0 ; +\infty[$ les 3 facteurs : x ; $x + 2$ et e^x sont positifs, donc leur produit est positif. La dérivée g' est positive, donc la fonction g est croissante. (vous pouvez remplacer par un tableau de signe si c'est plus clair pour vous...)

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	+
$g(x)$	-1	↗

b. $g(0) = -1$ et (par exemple), $g(1) = e - 1 > 0$.

La fonction g est **continue et strictement croissante** sur $[0 ; +\infty[$, avec $0 \in [g(0); g(1)]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une **unique** solution sur $[0 ; +\infty[$, qu'on appellera a .

On a : $g(0,703) \simeq -0,0018$ et $g(0,704) \simeq 0,00205$ donc on a bien $a \in [0,703; 0,704[$

c.

x	0	a	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

2. a. $f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2e^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ CQFD

c. Si m est le minimum de f , on a, d'après le tableau

$$m = f(a) = e^a + \frac{1}{a}$$

Or, d'après la question 1b., on sait que $g(a) = 0$ donc que

$$a^2e^a - 1 = 0 \Leftrightarrow e^a = \frac{1}{a^2}$$

On en déduit que $m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$ est le minimum de f

d. On a montré à la question 1c. que $0,703 < a < 0,704$ donc $\frac{1}{0,704} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0,703}$

De même on en déduit que $0,494209 < a^2 < 0,495616$ et donc $\frac{1}{0,495616} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{0,494209}$

Par addition, on a alors $\frac{1}{0,495616} + \frac{1}{0,704} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} < \frac{1}{0,494209} + \frac{1}{0,703}$

Et, en arrondissant : $3,43 < m < 3,45$

b.

x	0	a	$+\infty$	
$g(x)$	-	0	+	
x^2	0	+	+	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	$e^a + \frac{1}{a}$	↗

Correction Sujet n°2

Partie A

1. Le coût de production de 21 000 pièces est d'environ **250 000 €**
2. On cherche quand $R > C$, c'est-à-dire pour $x \in [3; 23]$
L'entreprise réalise un bénéfice quand elle fabrique **entre 3 000 et 23 000 pièces**
3. On cherche le plus grand écart entre C et R (très approximatif) : pour $x \simeq 13$
Le bénéfice semble maximal quand l'entreprise fabrique **autour de 13 000 pièces**

Partie B

1. $B'(x) = -0,5 \times 2x + 6 + 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} = -x + 6 + 2 \ln x + 2 = -x + 8 + 2 \ln x$

2. $B''(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{-x+2}{x}$

On a $B'(1) = -1 + 8 + 2 \times 0 = 7$; $B'(2) = -2 + 8 + 2 \ln(2) = 6 + 2 \ln 2$
et $B'(30) = -30 + 8 + 2 \times \ln(30) = -22 + 2 \ln 30$

x	1	2	30
$-x + 2$	+	0	-
x	+		+
Signe $B''(x)$	+	0	-
Variations $B'(x)$	7	$\nearrow$ $6 + 2 \ln 2$	$\searrow$ $-22 + 2 \ln 30$

3. a. B' est continue, positive et strictement croissante sur $[1; 2]$: l'équation $B'(x) = 0$ n'y a donc pas de solution.
 B' est continue et strictement décroissante sur $[2; 30]$, avec $B'(2) > 0$ et $B'(30) \simeq -15,2 < 0$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B'(x) = 0$ y admet donc une solution unique, α
- b. On a $B'(13,1533) \simeq 4,5 \times 10^{-5} > 0$ et $B'(13,1534) \simeq -3,9 \times 10^{-5} < 0 \Rightarrow$ Donc $\alpha \simeq$ **13,153**

4.

x	1	$\alpha \simeq$ 13,153	30
Signe $B'(x)$	+	0	-
Variations $B(x)$	-14,5	$\nearrow$ $\simeq 40,199$	$\searrow$ $\simeq -85,928$

5. Le maximum est d'environ 40,199 pour $x = 13,153$
Il faut **produire 13 153 pièces** pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal, qui sera alors d'environ **40 000 €**

Correction Sujet n°3

Corrigé Partie A

1. On a $f(t_{0,5}) = \frac{1}{2}f(0) \Leftrightarrow \frac{20}{t_{0,5}+1} = 10 \Leftrightarrow 20 = 10t_{0,5} + 10 \Leftrightarrow t_{0,5} = \frac{20-10}{10} \Leftrightarrow t_{0,5} = 1$

La demi-vie est de 1 heure

2. On cherche $f(t) \leq 0,6$

1ère méthode : Avec le TVi

On a $f'(t) = -\frac{20}{(t+1)^2} < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0; 20]$. Elle y est aussi continue, et $f(0) = 20 > 0,6$ et $f(39) = 0,5 < 0,6$ par exemple.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 0,6$ admet une unique solution t_0 . Par encadrements successifs à la calculatrice, on trouve $t_0 \approx 32,33$ soit au bout de 32h et 20 minutes

2ème méthode : résolution directe

$f(t) \leq 0,6 \Leftrightarrow \frac{20}{t+1} \leq 0,6 \Leftrightarrow t+1 \geq \frac{20}{0,6} \Leftrightarrow t \geq \frac{100}{3} - 1 \Leftrightarrow t \geq \frac{97}{3}$ soit au bout de 32h et 20 minutes

Corrigé Partie B

1. Initialisation : pour $n = 1$, on a $40 - 40 \times 0,5 = 40 - 20 = 20 = u_1$ La propriété est vraie au rang 1

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $u_n = 40 - 40 \times 0,5^p$

Hérédité : $u_{p+1} = 0,5u_p + 20 = 0,5(40 - 40 \times 0,5^p) + 20$ par hypothèse de récurrence

$$u_{p+1} = 20 - 40 \times 0,5 \times 0,5^p + 20 = 40 - 40 \times 0,5^{p+1} \text{ La propriété est vraie au rang } p + 1$$

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 1$, on a bien : $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$

2. On cherche à résoudre $u_n \geq 38$

À la calculatrice, on trouve $u_4 = 37,5$ et $u_5 = 38,75$ Il faut donc au minimum 5 injections

Correction Sujet n°4

1. Proposition 1 : VRAIE

Sur l'intervalle $[-3 ; 0]$, la fonction f est continue et **strictement négative**, l'équation $f(x) = 0$ n'y admet donc aucune solution.

Par contre, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0 ; 1]$, avec $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ y admet une unique solution.

2. Proposition 2 : FAUX

Par lecture graphique, on voit que $g'(x) \geq 0$ sur $[0 ; 4]$. La fonction g y est donc **croissante** au contraire.

Proposition 3 : VRAIE

Par lecture graphique, on voit que g' est décroissante sur $[0 ; 13]$. La fonction dérivée seconde g'' y est donc **négative** et la fonction g est **concave**.

Correction Sujet n°5

1. **Réponse D** (ne pas oublier $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et négatif quand ça descend)

2. **Réponse B** (Graphiquement, la fonction est concave sur $[1 ; 3]$, donc f'' négative, et convexe sur $[3 ; 7]$ donc f'' positive. En $x = 3$ il y a un point d'inflexion, donc $f(3) = 0$)

Correction Sujet n°6

1) Graphiquement, on conjecture que le point est $A(-1; 2)$

On calcule $f(0) = \frac{2}{(-1+2)^p} = \frac{2}{1^p} = 2$ **Donc toutes les courbes C_p passent par le point $A(-1; 2)$**

2) $f'_p = \frac{-2p}{(x+2)^{p+1}}$ or comme $x > -2$, on a $x + 2 > 0$ et donc $(x + 2)^{p+1} > 0$

Les dérivées f'_p sont toutes du signe de $-2p$ c'est-à-dire négatives, et les **fonctions f_p sont strictement décroissantes sur $] - 2; +\infty[$**

3) a. $f_p(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{(x+2)^p} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x+2)^p = 4 \Leftrightarrow (x+2)^p - 4 = 0$ CQFD

b. On a d'après la question précédente $(x+2)^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow f_3(x) = \frac{1}{2}$

Or la fonction f_3 est continue et strictement décroissante sur $] - 2; +\infty[$.

On a $f_3(-1) = 2 > \frac{1}{2}$ et $f_3(0) = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2}$ est une valeur intermédiaire.

D'après le Tvi, l'équation $f_3(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $[-1; 0]$.

Comme $f(x) > 2$ pour $x \in] - 2; -1[$ et $f(x) < \frac{1}{4}$ pour $x > 0$, il n'y a pas d'autres solutions.

L'équation $(x+2)^3 - 4 = 0$ admet bien une unique solution α sur $] - 2; +\infty[$

À la calculatrice, par balayages successifs, on trouve $\alpha \approx -0,4$

Correction Sujet n°7

Partie A

$$1. f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Or $1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Rightarrow x \leq e$

2. D'après la question précédente, la fonction f admet son maximum pour $x = e$

qui est de $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$

x	0	e	$+\infty$
$1 - \ln x$		+	0 -
x^2		+	+
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$ ↘

Partie B

1. pour $n \geq 3$, on a $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} < \frac{1}{e}$. Par ailleurs $f(1) = 0$ et $f(e) = \frac{1}{e}$

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1; e]$, et $\frac{1}{n} \in [f(0); f(e)]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet bien une unique solution**, notée α_n , sur $[1; e]$, pour $n \geq 3$.

Correction Sujet n°8

Partie A

- T_1 est tangente en $\mathcal{C}_f$ en $x_A = -1$ et elle est parallèle à (Ox) donc $f'(-1) = 0$.
 T_2 est tangente en $\mathcal{C}_f$ en $x_C = 1$ et son coefficient directeur est : $f'(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{1} = -2$.
- Cela veut dire qu'au point B , la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente.
- L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point C est :
 $y = f'(x_C)(x - x_C) + f(x_C) \Leftrightarrow y = -2(x - 1) + 3 \Leftrightarrow y = -2x + 5$.

Partie B

- On a : $f'(x) = 1e^{-x+1} + (x+2) \times (-1)e^{-x+1} = (1-x-2)e^{-x+1} = (-x-1)e^{-x+1} = -(x+1)e^{-x+1}$.
CQFD
- $x+1$ s'annule en $x = -1$. D'autre part : $f(-2) = 0$; $f(-1) = e^2$ et $f(4) = 6e^{-3}$.
On obtient donc le tableau :

x	-2	-1	4
-1	-		-
$x+1$	-	0	+
e^{-x+1}	+		+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0 ↗	e^2	↘ $6e^{-3}$

Partie C

- on a : $f''(x) = xe^{-x+1}$. f'' est donc positive lorsque x est positif.
 f est donc convexe sur $[0; 4]$.