Formulaire et Théorèmes

de Géométrie

Nature d'un triangle

Triangle rectangle

- Un triangle est rectangle s'il a un angle droit (ou deux côtés perpendiculaires)

Triangle isocèle

- Un triangle est isocèle s'il a deux côtés égaux
- Un triangle est isocèle s'il a deux angles égaux

Triangle équilatéral

- Un triangle est équilatéral s'il a trois côtés égaux
- Un triangle est isocèle s'il a trois angles égaux (60°)

Nature d'un quadrilatère

Parallélogramme

- Un quadrilatère est un parallélogramme s'il a ses côtés opposés parallèles 2 à 2
- Un quadrilatère est un parallélogramme s'il a ses côtés de même longueur 2 à 2
- Un quadrilatère est un parallélogramme s'il a ses angles opposés de même mesure 2 à 2
- Un quadrilatère est un parallélogramme s'il a ses diagonales qui se coupent en leur milieu
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors ABCD est un parallélogramme

Rectangles

- Un rectangle est un parallélogramme qui a ses diagonales de la même longueur
- Un rectangle est un parallélogramme qui a un angle droit

Carrés

- Un carré est un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires et de la même longueur

Losanges

- Un losange est un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires
- Un losange est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de la même longueur
- Un carré est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs perpendiculaires et de la même longueur

Droites remarquables des triangles

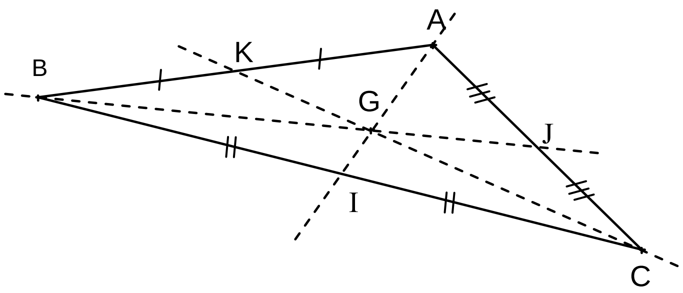
➢ Définition de la médiane

La médiane issue d'un sommet est la droite passant par ce sommet et par le milieu du côté opposé

Application

Comme [AM] est la médiane issue de A dans le triangle ABC, alors M est le milieu de [BC].

➢ Les trois <u>médianes</u> d'un triangle sont concourantes : le point de concours s'appelle le <u>centre de gravité</u>



➢ Propriété du centre de gravité

Si G est le centre de gravité du triangle ABC,et I, J et K les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB], on a :

$AG = \frac{2}{3} \times AI$; $BG = \frac{2}{3} \times BJ$ et $CG = \frac{2}{3} \times CK$

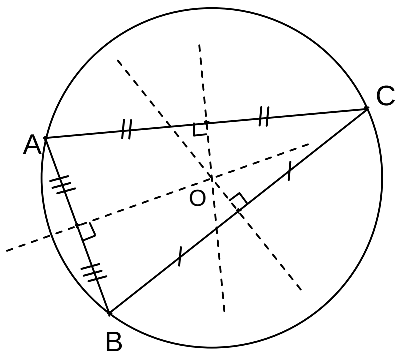
➢ Définition de la médiatrice

La médiatrice d'un segment est la droite qui passe en son milieu et qui lui est perpendiculaire

Application

Comme [OM] est la médiatrice de [BC], alors M est le milieu de [BC].

➢ Les trois <u>médiatrices</u> d'un triangle sont concourantes : le point de concours s'appelle le <u>centre du cercle circonscrit</u>.



➢ Cercle circonscrit

Le cercle circonscrit à un triangle, c'est le cercle qui passe par les 3 sommets du triangle.

En particulier, on a :

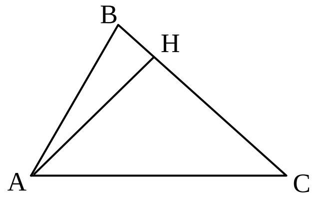
$OA = OB = OC$ (rayons du cercle)

Remarque

Les triangles isocèles ont leur médiatrice, médiane, hauteur et bissectrice issues du sommet principal confondues. C'est vrai pour tous les sommets des triangles équilatéraux/

➢ **Définition de la hauteur**

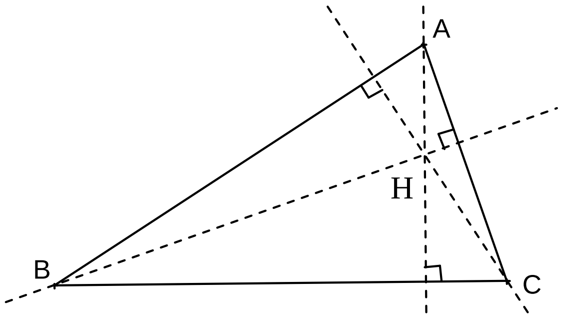
La hauteur issue d'un sommet est la droite passant par son sommet et perpendiculaire à son côté opposé



Application

Comme [AH] est la hauteur issue de A dans le triangle ABC, alors les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

➢ Les trois <u>hauteurs</u> d'un triangle sont concourantes : le point de concours s'appelle <u>l'orthocentre</u>



Exemples d'application

Si on sait que (BH) et (CH) sont 2 hauteurs du triangle ABC.

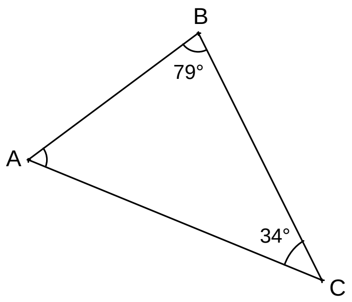
Alors H est l'orthocentre du triangle ABC.

Comme les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes, la droite (AH) est forcément la hauteur issue de A.

On a donc $(AH) \perp (BC)$

Autour des angles

Si on a un triangle quelconque



➢ La somme des angles d'un triangle fait 180°

Application

On a $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$ *Or* $\widehat{B} + \widehat{C} = 34° + 79° = 113°$

Donc $\widehat{A} = 180 - 113 = 67°$

Si on a un triangle rectangle

➢ **Trigonométrie**

$$\cos(\widehat{\text{angle}}) = \frac{\text{côté adjacent à l'angle}}{\text{hypoténuse}} \qquad \sin(\widehat{\text{angle}}) = \frac{\text{côté opposé à l'angle}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\widehat{\text{angle}}) = \frac{\text{côté opposé à l'angle}}{\text{côté adjacent à l'angle}}$$

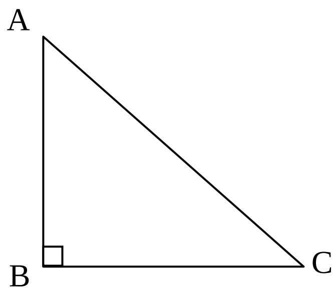
Théorème de Pythagore, réciproque et contraposée

Théorème direct de Pythagore

Si un triangle est rectangle, alors le carré de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés

Application

Comme le triangle ABC est rectangle en B, je peux appliquer le théorème direct de Pythagore.
L'hypoténuse est [AC]
On a donc : $AC^2 = AB^2 + BC^2$



Reste à résoudre l'équation pour calculer la longueur d'un des 3 côtés.

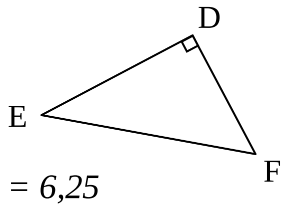
Si on cherche AC
$AC^2 = 5^2 + 6^2$
$AC^2 = 25 + 36$
$AC^2 = 61$
$AC = \sqrt{61}$

Si on cherche AB
$7^2 = AB^2 + 3^2$
$49 = AB^2 + 9$
$AB^2 = 49 - 9$
$AB^2 = 40$
$AB = \sqrt{40}$

Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle

Application



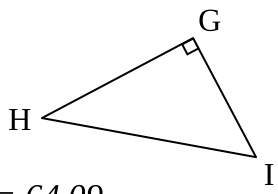
[EF] est le plus grand côté du triangle DEF
D'une part $EF^2 = 2,5^2 = 6,25$ *D'autre part* $ED^2 + DF^2 = 1,5^2 + 2^2$
$= 2,25 + 4 = 6,25$

Comme on a $EF^2 = ED^2 + DF^2$ ***, je peux appliquer la réciproque du théorème de Pythagore.***
Le triangle EFD est rectangle en D

Contraposée du théorème de Pythagore

Si dans un triangle, le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle

Application



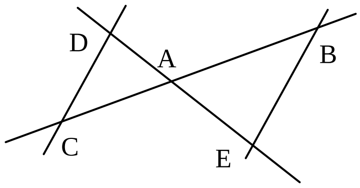
[HI] est le plus grand côté
D'une part $HI^2 = 8^2 = 64$ *D'autre part* $HG^2 + GI^2 = 3,5^2 + 7,2^2$
$= 12,25 + 51,84 = 64,09$

Comme on a $EF^2 \neq ED^2 + DF^2$ ***, je peux appliquer la contraposée du théorème de Pythagore.***
Le triangle EFD n'est pas rectangle

Théorème de Thalès, réciproque et contraposée

Théorème direct de Thalès

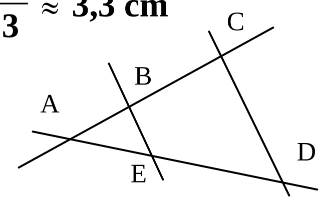
Si les points A, S et M sont alignés, si les points B, S et N sont alignés et si les droites (AB) et (MN) sont parallèles, alors on a $\frac{SA}{SM} = \frac{SB}{SN} = \frac{AB}{MN}$



Application

Comme les droites (EB) et (DC) sont parallèles,
je peux appliquer le théorème de Thalès dans les triangles ABE et ACD

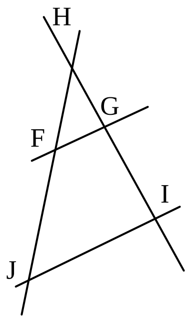
On a $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{EB}{DC}$ *Ou* $\frac{4}{6} = \frac{AE}{5} = \frac{3}{DC}$ *donc* $\boldsymbol{AE = \frac{4\times5}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \approx 3{,}3\ \text{cm}}$



Réciproque du théorème de Thalès

Si les points A, S et M sont alignés, si les points B, S et N sont alignés et si on a $\frac{SA}{SM} = \frac{SB}{SN}$, alors les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

Application



Dans les triangles HFG et HIJ, je compare :

D'une part $\boldsymbol{\frac{HF}{HJ}} = \frac{3}{5} = \frac{3\times7{,}5}{5\times7{,}5} = \boldsymbol{\frac{22{,}5}{37{,}5}}$ *D'autre part* $\boldsymbol{\frac{HG}{HI}} = \frac{4{,}5}{7{,}5} = \frac{4{,}5\times5}{7{,}5\times5} = \boldsymbol{\frac{22{,}5}{37{,}5}}$

Comme $\frac{HF}{HJ}$ *et* $\frac{HG}{HI}$ *sont égales, je peux appliquer la réciproque du théorème de Thalès.*
Les droites (FG) et (IJ) sont parallèles

Droite des milieux

Dans un triangle ABC, où M et N sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC], la droite (MN) est parallèle au 3ème côté [BC]

Remarque

Il s'agit d'une application du théorème de Thalès avec un rapport $\frac{1}{2}$

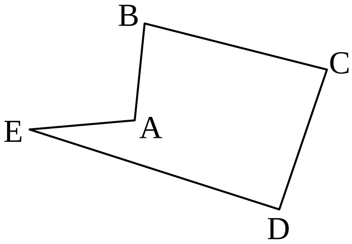
Et réciproque

Dans un triangle ABC, si M est le milieu du côté [AB], alors la droite passant par M et parallèle à [BC] coupe [AC] en son milieu.

Formulaire périmètres et aires

Périmètre

- Le périmètre d'une figure, c'est la longueur de « son tour ».

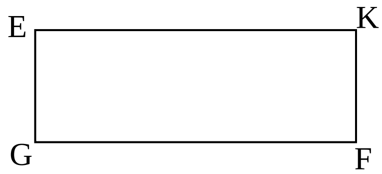


Application

Le périmètre $\mathcal{P}$ de la figure ci-contre est :
$\mathcal{P} = AB + BC + CD + DE + EA$

Aire d'un rectangle

- L'aire d'un rectangle s'obtient en multipliant sa longueur par sa largeur



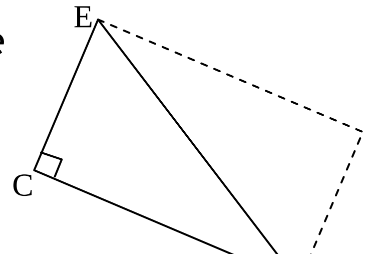
Application

L'aire $\mathcal{A}$ du rectangle EKFG ci-contre est :

$\mathcal{A} = EK \times EG$ (ou $GF \times KF$)

Aire d'un triangle rectangle

- Pour calculer l'aire d'un triangle rectangle, on multiplie les deux côtés de l'angle droit, et on divise par deux



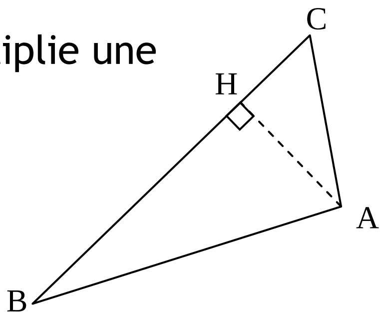
Un triangle rectangle peut être vu comme un rectangle coupé en deux

Application

L'aire $\mathcal{A}$ du triangle rectangle EBC ci-contre est $\mathcal{A} = \dfrac{EC \times CB}{2}$

Aire d'un triangle quelconque

- Pour calculer l'aire d'un triangle quelconque, on multiplie une hauteur par sa base, et on divise par deux



Application

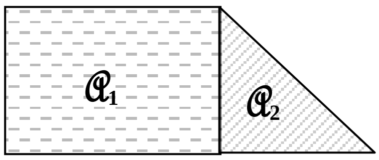
Le triangle ABC ci-contre a une hauteur AH. Son aire $\mathcal{A}$ est : $\mathcal{A} = \dfrac{AH \times BC}{2}$

Aire d'un polygone

- Pour calculer l'aire d'un polygone, on décompose la figure en triangles et rectangles, dont on additionne ou on soustrait les aires.

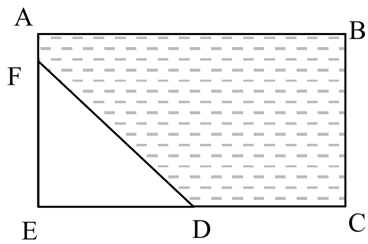
Application

L'aire du polygone est
$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$



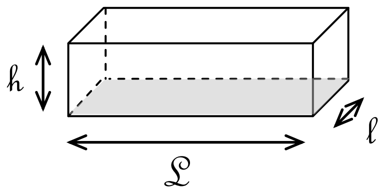
L'aire du polygone est
$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{(ABCE)} - \mathcal{A}_{(EFD)}$

$\mathcal{A} = (AB \times BC) - \left(\dfrac{EF \times ED}{2}\right)$



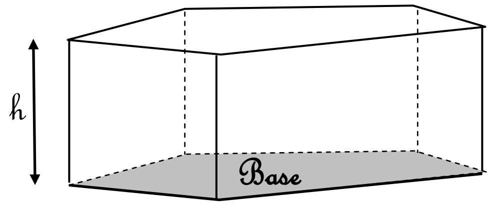
Formulaire des volumes

Parallélépipède rectangle (pavé droit)



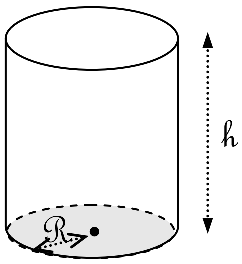
$$V = L \times \ell \times h$$

Prisme droit



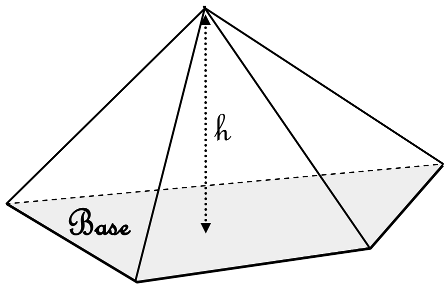
$$V = \text{Aire (base)} \times h$$

Cylindre



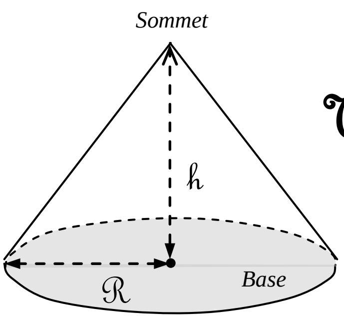
$$V = \pi \times R^2 \times h$$

Pyramide



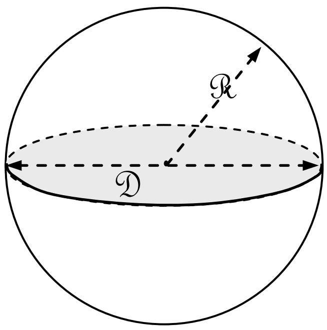
$$V = \frac{\text{Aire (base)} \times h}{3}$$

Cône



$$V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3}$$

Sphère



$$V = \frac{4 \times \pi \times R^3}{3}$$