

2. Suites numériques

• Rappel express formules

u_n : terme de rang général n

Le terme d'après, le terme de rang $n + 1$, se note u_{n+1}

Notations

$$u_3 = 7$$

Suite u

$$\text{Rang } n = 3$$

$$\text{Terme (de rang 3)} = 7$$

Notation fonction

$$u_3 = u(3)$$

Formule explicite

u_n en fonction de n

$$\text{Ex : } u_n = 3n - 4$$

Calcul direct :

On remplace n par la valeur

$$u_1 = 3 \times 1 - 4 = -1$$

$$\text{Ou } u_7 = 3 \times 7 - 4 = 17$$

Relation de récurrence

u_{n+1} en fonction de u_n

$$\text{Ex : } u_{n+1} = 5 - 2u_n$$

Calcul à partir d'un terme :

On donne $u_0 = 2$

$$\text{On calcule } u_1 = 5 - 2 \times 2 = 1$$

$$\text{Puis } u_2 = 5 - 2 \times 1 = 3$$

$$\text{Puis } u_3 = 5 - 2 \times 3 = -1 \text{ etc...}$$

• Suites arithmétiques de raison R

Situation : d'un terme au suivant,
on **ajoute** toujours la **même quantité R**

Par ex. Suite arithmétique de raison 5

Augmentation de 5€ chaque mois

Relation de récurrence :

u_{n+1} en fonction de u_n

$$u_{n+1} = u_n + R$$

Par ex. $u_{n+1} = u_n + 5$

Calcul de terme

$$\text{Si } u_0 = 12$$

Alors :

$$u_1 = 12 + 5 = 17$$

$$u_2 = 22; u_3 = 27 \dots$$

• Suites géométrique de raison q

Situation : d'un terme au suivant,
on **multiplie** toujours **par la même quantité q**

Par ex. Suite géométrique de raison 1,1

Augmentation de 10 % par an

Relation de récurrence :

u_{n+1} en fonction de u_n

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Par ex. $u_{n+1} = 1,1 \times u_n$

Calcul de terme

$$\text{Si } u_0 = 100$$

Alors :

$$u_1 = 1,1 \times 100 = 110$$

$$u_2 = 1,1 \times 110 = 121$$

...

✓ Exercice 1

Une ruche est composée initialement de 50 000 abeilles dont une reine. On constate que la population d'abeilles de cette ruche diminue de 8% chaque année à cause de la pollution et du bruit.

1. Une feuille de calcul nous donne l'évolution du nombre d'abeilles dans cette ruche.

Le rang 0 correspond à l'année 2019. En voici un premier extrait.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Rang de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7
2	Nombre d'abeilles	50 000	46 000	42 320	38 934	35 820	32 954	30 318	27 892

a. Par quel calcul obtient-on le nombre 46 000 de la case C2 ?

b. Combien d'abeilles y aurait-il en 2025 ?

2. On note a_n le nombre d'abeilles au bout de n années à partir de 2019. On a donc $a_0 = 50\,000$.

a. Justifier que la suite (a_n) est géométrique et préciser sa raison.

b. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n

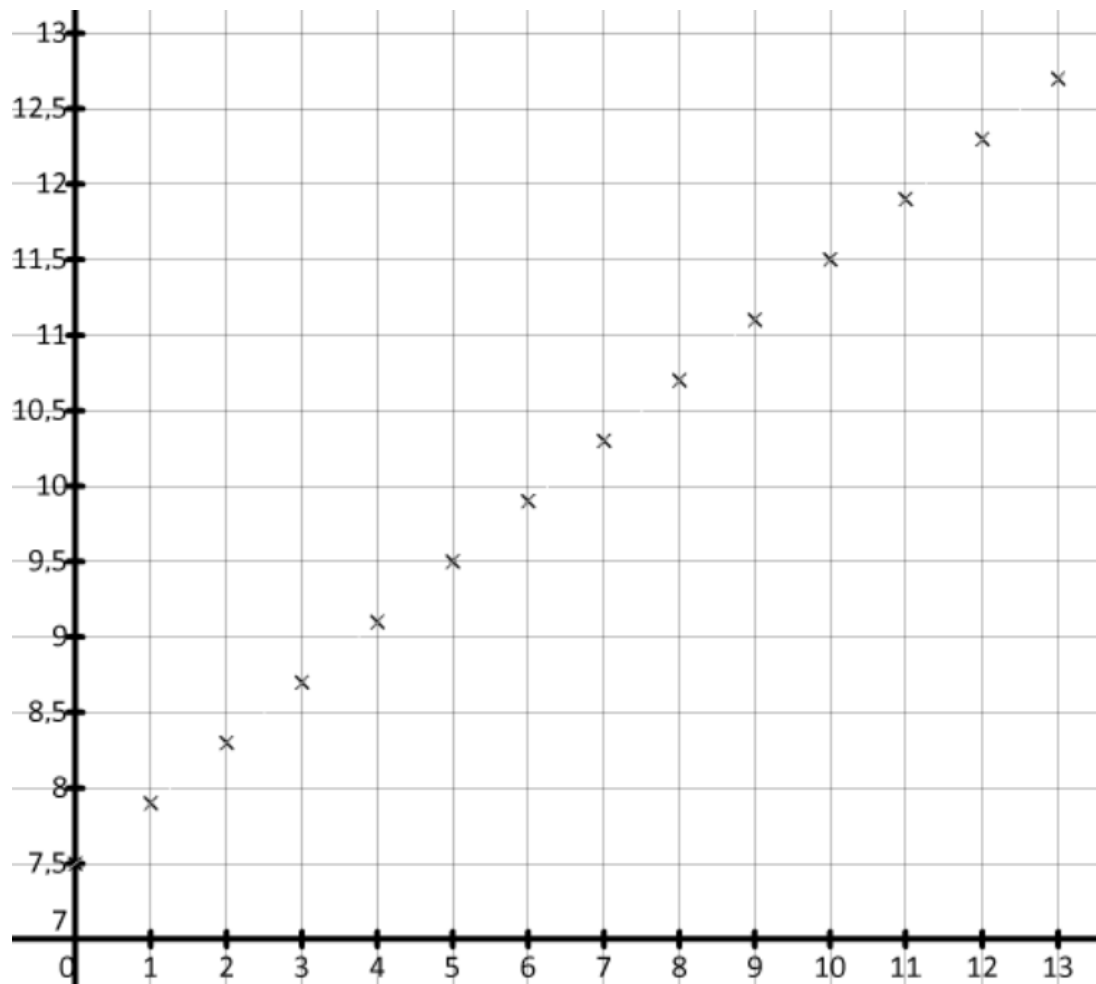
c. Une ruche produit du miel si au moins 10 000 abeilles l'habite.

En observant le tableau ci-dessous, indiquer à partir de quelle année la ruche ne produira plus de miel.

S	T	U	V	W	X
17	18	19	20	21	22
12 116	11 147	10 255	9 435	8 680	7 986

3. On s'intéresse à une ruche qui n'est soumise ni au bruit, ni à la pollution.

Le graphique ci-dessous représente les premières valeurs b_n , donnant le nombre d'abeilles, en milliers, de cette ruche au cours de l'année 2019 + n



a. Déterminer graphiquement la valeur de b_5 . Interpréter dans le contexte.

b. Pourquoi peut-on conjecturer que la suite (b_n) est une suite arithmétique ?
Quels seraient alors son 1^{er} terme et sa raison ?

c. On rappelle qu'une ruche produit du miel si au moins 10 000 abeilles l'habite.
À partir de combien d'années cette ruche produira-t-elle du miel ?

✓ Exercice 2

En 2017, une entreprise réalisait un chiffre d'affaires de 40 millions d'euros. Depuis, le chiffre d'affaires a augmenté de 10 % chaque année.

1. Calculer le chiffre d'affaires en millions d'euros de cette entreprise en 2018.

Afin de prendre des décisions pour l'avenir, on considère que le chiffre d'affaires de l'entreprise continuera d'augmenter de 10 % chaque année.

On note v_n le chiffres d'affaires en millions d'euros de cette entreprise en 2017 + n selon ce modèle de croissance. Ainsi v_0 désigne le chiffre d'affaires en millions d'euros en 2017, v_1 le chiffre d'affaires en millions d'euros en 2018 . . .

2. Quel calcul doit-on faire pour obtenir v_2 ?

3. a. Justifier que v est une suite géométrique et préciser sa raison

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n

4. Le directeur affirme qu'il prendra la décision de construire une nouvelle usine lorsque son chiffre d'affaires dépassera 70 millions d'euros.

On donne ci-contre les prévisions de chiffres d'affaires modélisés avec la suite (v_n) .

En quelle année le directeur prendrait-il alors la décision de construire une nouvelle usine ? Justifier.

n	v_n
3	53,24
4	58,564
5	64,4204
6	70,86244
7	77,948684
8	85,7435524
9	94,3179076
10	103,749698

✓ Automatismes

1^{ère} partie : En réponses à donner.

1) On donne la suite définie par $u_{n+1} = 1 + 3u_n$ et $u_1 = 6$. Calculer u_2 .																																					
2) (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et de 1 ^{er} terme $v_0 = 410$. Donner le calcul qu'il faut effectuer pour obtenir la valeur de v_2																																					
3) On donne la suite définie par $w_n = 2^n - 7$. Calculer w_3 .																																					
4) On note p_n le nombre de millions d'habitants d'un pays au début de l'année 2016 + n . Interpréter le terme $p_7 = 15,613$ dans le contexte.																																					
5) (C_n) est une suite arithmétique de raison 11 et de 1 ^{er} terme $C_0 = 3$. Donner le calcul qu'il faut effectuer pour obtenir la valeur de C_2																																					
6) Les bénéfices annuels d'une entreprise sont modélisés par la suite (B_n) où B_n représente le bénéfice, en million d'euros, à la fin de l'année 2012 + n . L'entreprise voit son bénéfice diminuer régulièrement. On donne ci-contre un extrait de feuille de calcul donnant les premiers termes de la suite B_n . À la fin de quelle année, l'entreprise devient-elle déficitaire ?	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>n</td> <td>Bn</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0</td> <td>4,528</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>1</td> <td>3,819</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>2</td> <td>2,04</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>3</td> <td>1,354</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>4</td> <td>0,987</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>5</td> <td>0,213</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>6</td> <td>-0,401</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>7</td> <td>-1,72</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>8</td> <td>-2,038</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>9</td> <td>-5,196</td> </tr> </tbody> </table>		A	B	1	n	Bn	2	0	4,528	3	1	3,819	4	2	2,04	5	3	1,354	6	4	0,987	7	5	0,213	8	6	-0,401	9	7	-1,72	10	8	-2,038	11	9	-5,196
	A	B																																			
1	n	Bn																																			
2	0	4,528																																			
3	1	3,819																																			
4	2	2,04																																			
5	3	1,354																																			
6	4	0,987																																			
7	5	0,213																																			
8	6	-0,401																																			
9	7	-1,72																																			
10	8	-2,038																																			
11	9	-5,196																																			

2^{ème} partie. En QCM, une seule réponse juste.

	A.	B.	C.	D.																																																								
<p>1) Une somme d'argent est placée avec un taux d'intérêt annuel de 5 %. Pour calculer le montant des intérêts à l'issue de la première année, il faudra multiplier cette somme par :</p>	0,05	0,5	0,95	1,05																																																								
<p>2) On donne la suite définie par : $u_{n+1} = 2u_n - 10$ et $u_1 = 25$ La valeur de u_3 est :</p>	-4	40	70	130																																																								
<p>3) La suite définie par $v_{n+1} = 2v_n$ et $v_0 = 10$ peut être représentée par :</p>																																																												
<p>4) Une entreprise vend sa première année 200 unités de son nouveau produit. On considère la suite u de premier terme $u_0 = 200$ et telle que pour tout entier positif n :</p> $u_{n+1} = u_n + 20.$ <p>Parmi ces situations, laquelle pourrait être modélisée grâce à la suite u :</p>	Chaque année elle vend 10% d'unités en plus que l'année précédente.	Chaque année elle vend 20 % d'unités en plus que l'année précédente.	Chaque année elle vend 20 unités de plus que l'année précédente.	Chaque année elle vend chaque unité 20€ de plus																																																								
<p>5) Une population d'insecte diminue de 15 % chaque année. On note p_n le nombre de milliers d'insecte n années après la première observation. On peut exprimer p_{n+1} par :</p>	$0,15p_n$	$p_n - 0,15$	$0,85 p_n$	$p_n - 0,85$																																																								
<p>6) La suite définie par $a_n = 200 \times 1,5^n$ A pour premiers termes :</p>	<table border="1"> <thead> <tr><th>n</th><th>an</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>200</td></tr> <tr><td>1</td><td>220</td></tr> <tr><td>2</td><td>440</td></tr> <tr><td>3</td><td>660</td></tr> <tr><td>4</td><td>880</td></tr> <tr><td>5</td><td>1100</td></tr> </tbody> </table>	n	an	0	200	1	220	2	440	3	660	4	880	5	1100	<table border="1"> <thead> <tr><th>n</th><th>an</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>200</td></tr> <tr><td>1</td><td>300</td></tr> <tr><td>2</td><td>600</td></tr> <tr><td>3</td><td>900</td></tr> <tr><td>4</td><td>1200</td></tr> <tr><td>5</td><td>1500</td></tr> </tbody> </table>	n	an	0	200	1	300	2	600	3	900	4	1200	5	1500	<table border="1"> <thead> <tr><th>n</th><th>an</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>200</td></tr> <tr><td>1</td><td>300</td></tr> <tr><td>2</td><td>450</td></tr> <tr><td>3</td><td>675</td></tr> <tr><td>4</td><td>1012,5</td></tr> <tr><td>5</td><td>1518,75</td></tr> </tbody> </table>	n	an	0	200	1	300	2	450	3	675	4	1012,5	5	1518,75	<table border="1"> <thead> <tr><th>n</th><th>an</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>200</td></tr> <tr><td>1</td><td>220</td></tr> <tr><td>2</td><td>242</td></tr> <tr><td>3</td><td>266,2</td></tr> <tr><td>4</td><td>292,82</td></tr> <tr><td>5</td><td>322,102</td></tr> </tbody> </table>	n	an	0	200	1	220	2	242	3	266,2	4	292,82	5	322,102
n	an																																																											
0	200																																																											
1	220																																																											
2	440																																																											
3	660																																																											
4	880																																																											
5	1100																																																											
n	an																																																											
0	200																																																											
1	300																																																											
2	600																																																											
3	900																																																											
4	1200																																																											
5	1500																																																											
n	an																																																											
0	200																																																											
1	300																																																											
2	450																																																											
3	675																																																											
4	1012,5																																																											
5	1518,75																																																											
n	an																																																											
0	200																																																											
1	220																																																											
2	242																																																											
3	266,2																																																											
4	292,82																																																											
5	322,102																																																											

2. CORRECTIONS

✓ Exercice 1: CORRIGÉ

- a. Avec le calcul $50\,000 \times (1 - 0,08)$ ou $50\,000 \times 0,92$

b. L'année 2025 correspond au rang $2025 - 2019 = 6$ on a alors **30 318 abeilles**
- a. D'une année à l'autre, diminuer de 8% revient à multiplier toujours par 0,92, donc $a_{n+1} = 0,92a_n$
La suite (a_n) est bien géométrique et de **raison 0,92**

b. $a_{n+1} = 0,92 \times a_n$

c. Pour $n = 19$, on a $a_{19} = 10\,255 > 10\,000$ mais pour $n = 20$, on a $a_{20} = 9435 < 10\,000$
Le rang 20 correspond à l'année 2039, c'est donc à **partir de 2039 que la ruche ne produirait plus de miel**
- a. pour $x = 5$ on lit $y = 9,5$ donc $b_5 = 9,5$. **En 2024, la ruche compterait 9 500 abeilles.**

b. On remarque graphiquement que la suite **augmente régulièrement de la même quantité : de 0,4.**
On a $b_{n+1} = b_n + 0,4$ c'est bien une suite arithmétique de **raison 0,4**. On lit le 1^{er} terme $b_0 = 7,5$.

c. Graphiquement, on voit que $b_6 < 10$ mais $b_7 > 10$. **Donc cette ruche produira au bout de 7 ans.**

✓ Exercice 2: CORRIGÉ

- On calcule $40 \times 1,1 = 44$ ou $40 + 0,1 \times 40 = 40 + 4 = 44$
Le chiffre d'affaires en 2018 est de 44 millions d'euros.
- $v_2 = 44 \times 1,1$?
- a. Augmenter de 10 % revient à multiplier chaque année par 1,1 : c'est bien une suite géométrique de **raison 1,1**

b. On a $v_{n+1} = 1,1v_n$:
- Pour $n = 5$, on a $v_5 \approx 64,4 < 70$ mais pour $n = 6$, on a $v_6 \approx 70,9 > 70$
Le rang 6 correspond à l'année 2023, c'est donc **en 2023 qu'il prendrait la décision de construire une nouvelle usine**

✓ **Automatismes: CORRIGÉ**

Corrigé 1^{ère} partie

1)	$u_2 = 1 + 3 \times 6 = 19$
2)	$v_2 = 410 \times 0,85 \times 0,85$
3)	$w_3 = 2^3 - 7 = 8 - 7 = 1$
4)	Le pays compte 15 613 000 habitants en 2023
5)	$C_2 = 3 + 11 + 11$
6)	$B_5 > 0$ et $B_6 < 0$ et le rang 6 correspond à l'année 2018 L'entreprise devient déficitaire à la fin de 2018

Corrigé 2^{ème} partie - QCM

1) Augmenter de 5 % revient multiplier par $1 + \frac{5}{100} = 1,05$	Réponse D
2) $u_2 = 2 \times 25 - 10 = 40$ et $u_3 = 2 \times 40 - 10 = 70$	Réponse C
3) $v_0 = 10 ; v_1 = 20 ; v_2 = 40 \Rightarrow$ Points 0; 10); (1; 20) et (2; 40)	Réponse A
4) D'un terme à l'autre on ajoute 20	Réponse C
5) Diminuer de 15 % revient à multiplier par $1 - \frac{15}{100} = 0,85$	Réponse C
6) $a_0 = 200 \times 1 = 200 ; a_1 = 200 \times 1,5 = 300$ $a_2 = 200 \times 1,5^2 = 200 \times 1,5 \times 1,5 = 300 \times 1,5 = 450$	Réponse C