

# À partir d'une figure

## 5. Asie - sept 2025

« Dans un triangle non équilateral, la droite d'Euler est la droite qui passe par les trois points suivants :

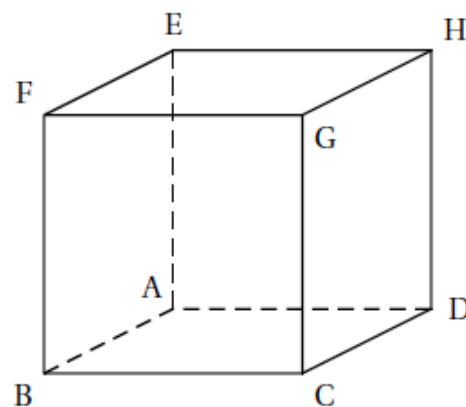
- le centre du cercle circonscrit à ce triangle (cercle passant par les trois sommets de ce triangle).
- le centre de gravité de ce triangle situé à l'intersection des médianes de ce triangle.
- l'orthocentre de ce triangle situé à l'intersection des hauteurs de ce triangle. »

Le but de l'exercice est d'étudier un exemple de droite d'Euler.

On considère un cube ABCDEFGH de côté une unité.

L'espace est muni du repère orthonormé  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

On note  $I$  le milieu du segment  $[AB]$  et  $J$  le milieu du segment  $[BG]$ .



1. Donner sans justification les coordonnées des points  $A, B, G, I$  et  $J$ .

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(AJ)$ .

b. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite  $(IG)$  est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

c. Démontrer que les droites  $(AJ)$  et  $(IG)$  sont sécantes en un point  $S$  de coordonnées  $S\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

3. a. Montrer que le vecteur  $\vec{n}(0; -1; 1)$  est normal au plan  $(ABG)$ .

b. En déduire une équation cartésienne du plan  $(ABG)$ .

c. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite  $(d)$  de vecteur directeur  $\vec{n}$  et passant par le

point  $K$  de coordonnées  $K\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$  est :  $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

Montrer que cette droite  $(d)$  coupe le plan  $(ABG)$  en un point  $L$  de coordonnées  $L\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

d. Montrer que le point  $L$  est équidistant des points  $A, B$  et  $G$ .

4. Montrer que le triangle  $ABG$  est rectangle en  $B$ .

5. a. Identifier le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle  $ABG$  (aucune justification n'est attendue).

b. Vérifier par un calcul que ces trois points sont effectivement alignés.

## 6. Métropole - sept 2024

On considère le cube  $ABCDEFGH$  représenté ci-contre.  
Les points  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs des segments  $[AB]$  et  $[CG]$ . Le point  $N$  est le milieu du segment  $[IJ]$ .

L'objectif de cet exercice est de calculer le volume du tétraèdre  $HFIJ$ .

On se place dans le repère orthonormé  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1. a. Donner les coordonnées des points  $I$  et  $J$ .  
En déduire les coordonnées de  $N$ .
- b. Justifier que les vecteurs  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{NF}$  ont pour coordonnées respectives :

$$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{NF} \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}$$

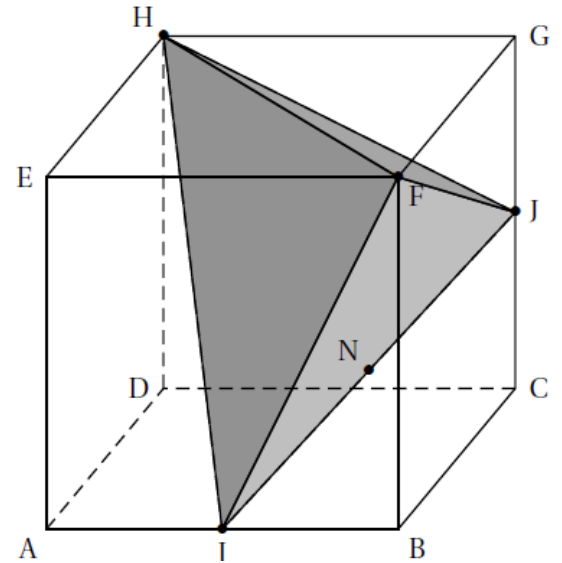
- c. Démontrer que les vecteurs  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{NF}$  sont orthogonaux.

On admet que  $NF = \frac{\sqrt{14}}{4}$

- d. En déduire que l'aire du triangle  $FIJ$  est égale à  $\frac{\sqrt{21}}{8}$

2. On considère le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

- a. Démontrer que le vecteur  $\vec{u}$  est normal au plan  $(FIJ)$ .
- b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan  $(FIJ)$  est :  $4x - y - 2z - 2 = 0$ .
- c. On note  $d$  la droite orthogonale au plan  $(FIJ)$  passant par le point  $H$ . Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $d$ .
- d. Montrer que la distance du point  $H$  au plan  $(FIJ)$  est égale à  $\frac{5\sqrt{21}}{21}$
- e. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule  $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$  où  $\mathcal{B}$  est l'aire d'une base et  $h$  la longueur de la hauteur relative à cette base.  
Calculer le volume du tétraèdre  $HFIJ$ . On donnera la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

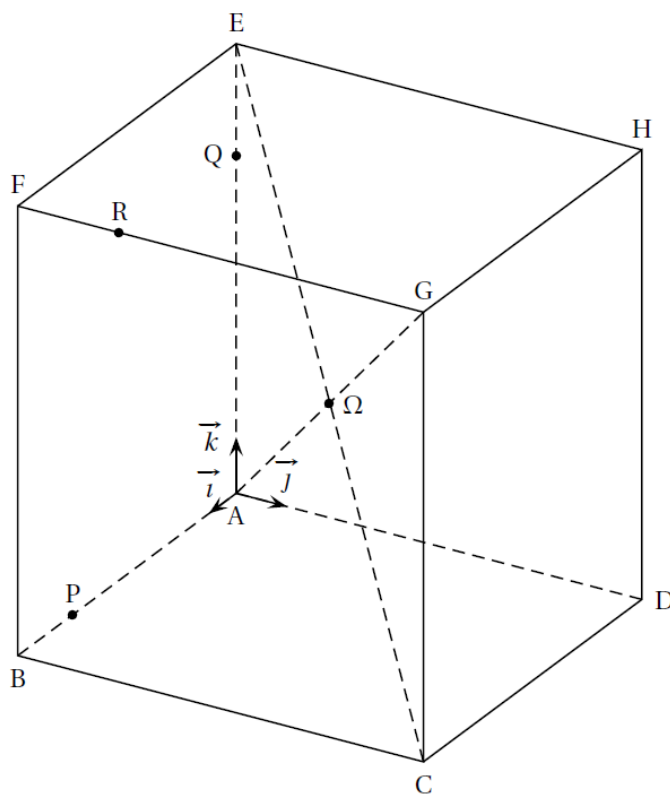


## 7. Asie - juin 2021

On considère un cube  $ABCDEFGH$  d'arête 8 cm et de centre  $\Omega$ .

Les points  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont définis par  $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$ .

On se place dans le repère orthonormé  $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  avec :  $\vec{i} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$ ;  $\vec{j} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ ;  $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$ .



### Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point  $R$  sont  $(8; 2; 8)$ .  
Donner les coordonnées des points  $P$  et  $Q$ .
2. Montrer que le vecteur  $\vec{n}(1; -5; 1)$  est un vecteur normal au plan  $(PQR)$ .
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan  $(PQR)$  est  $x - 5y + z - 6 = 0$ .

### Partie II

On note  $L$  le projeté orthogonal du point  $\Omega$  sur le plan  $(PQR)$ .

1. Justifier que les coordonnées du point  $\Omega$  sont  $(4; 4; 4)$ .
2. Donner une représentation paramétrique de la droite  $d$  perpendiculaire au plan  $(PQR)$  et passant par  $\Omega$ .
3. Montrer que les coordonnées du point  $L$  sont  $(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{14}{3})$ .
4. Calculer la distance du point  $\Omega$  au plan  $(PQR)$ .

