Savoirs Ft. 2 : Dérivées et primitives

Exercice 3 : Dérivées

1) Dériver les fonctions suivantes :

$$f(x) = x + \cos x \qquad g(x) = 2\sin x - \cos x \qquad h(x) = \sin(x)\cos(x)$$

$$i(x) = x^2 \sin x \qquad k(x) = \tan x \quad \text{pour } x \neq \frac{k\pi}{2} \qquad l(x) = \cos^2 x$$

2) Déterminer les tableaux de variations (valeurs exactes) des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

$$f(x) = \sin^2 x \quad \text{sur } [0;\pi] \qquad g(x) = x - \cos x \quad \text{sur } [0;\pi]$$

3) Dériver les fonctions suivantes :

$$g(x) = \sin(2x) \qquad j(x) = 2x\cos(x+1) \qquad k(x) = \frac{2\cos(2x)}{3\sin(2x)}$$

4) Déterminer les tableaux de variations (valeurs exactes) des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

$$f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{sur }]-\pi;\pi[\qquad h(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right) \quad \text{sur } [0;\pi]$$

Exercice 4 : Primitives et intégrales

1) On donne la fonction f définie sur $[-\pi;\ \pi]$ par : $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$
Montrer que la fonction $F(x) = 1 - \cos x \sin x$ est une primitive de f.

2) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2 + \cos(x\pi))\, dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\ dx$
En utilisant une intégration par partie

Exercice 5 : Études de fonctions

1) a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\cos x = x$

b) Justifier que les solutions appartiennent forcément à $[-1;1]$

c) Étudier le sens de variation de la fonction h sur $[-1;1]$ par $h(x) = x - \cos x$

d) En déduire le nombre de solutions de l'équation $\cos x = x$

e) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la ou des solution(s).

2) Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = 2x + \sin 2x$

a) Montrer que $f'(x) = 2(1 + \cos 2x)$

b) Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

c) En déduire le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

d) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{\pi}{2}$