

Vrai-faux : Annales diverses bac 2024 et 2025

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

① On considère l'équation différentielle : $(E) \quad y' = \frac{1}{2}y + 4$.

Affirmation 1 : Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{\frac{1}{2}x} - 8$, avec $k \in \mathbb{R}$.

② Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x}$.

On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' la dérivée de la fonction f .

Affirmation 2. La fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2y = e^{-2x}$.

③ Sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y - e^x$.

Affirmation 3 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle (E) .

④ On considère la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = (2x + 1)\ln(x)$.

Affirmation 4 : La fonction F est une primitive de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x}$.

⑤ On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = 45e^{0,06t} + 20$.

Affirmation 5 : La fonction g est l'unique solution de l'équation différentielle

$$(E_1) : y' + 0,06y = 1,2 \text{ vérifiant } g(0) = 65.$$

⑥ On considère l'équation différentielle : $(E_2) : y' - y = 3e^{0,4x}$ où y est une fonction positive de la variable réelle x , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de la fonction y .

Affirmation 6 : Les solutions de l'équation (E_2) sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.

⑦ On considère l'équation différentielle $(E) : -2y' + 3y = \sin x + 8 \cos x$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 \cos x - \sin x$

Affirmation 7 : La fonction f est solution de l'équation différentielle (E) .

⑧ On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln x$

Affirmation 8 : La fonction f est une solution sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle $xy' - y = x$

⑨ On considère la fonction k définie et continue sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = 1 + 2e^{-x^2+1}$

Affirmation 9 : Il existe une primitive de la fonction k décroissante sur $\mathbb{R}$

Sujet 1 : Amérique du Nord 1 – juin 2025

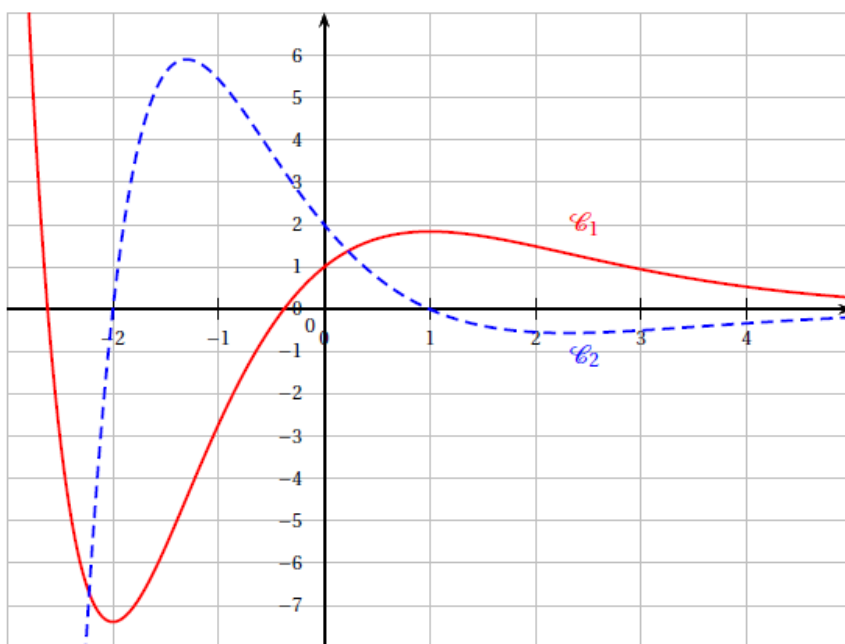
La **partie C** est indépendante des parties **A** et **B**.

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g' .

On précise également que :

- La courbe $\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 1)$.
- La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2 ; 0)$ et $(1 ; 0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle $y + y' = (2x + 3)e^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x .

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par: $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$, est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y + y' = 0$.
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) .
4. On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E) . Déterminer alors l'expression de la fonction g .
5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

(question hors programme pour l'instant) On admet que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.
On admet que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

a. Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$.

b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

4. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}; \vec{j})$

Montrer que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f .

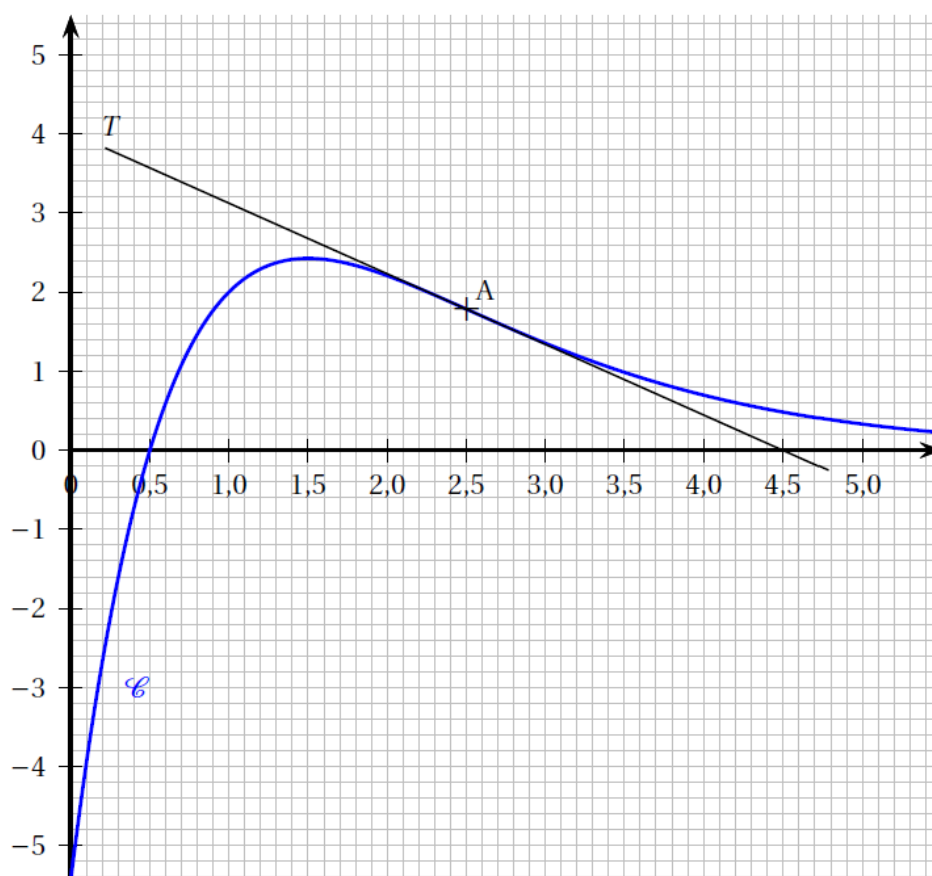
(Suite de la question hors programme pour l'instant)

Sujet 2 : Asie 1 – juin 2024

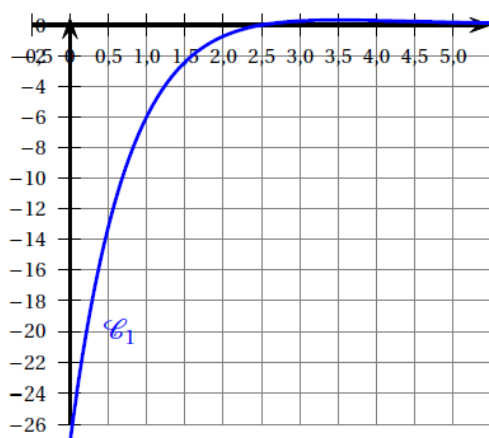
Partie A

On considère une fonction f définie sur $[0; +\infty[$, représentée par la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous.

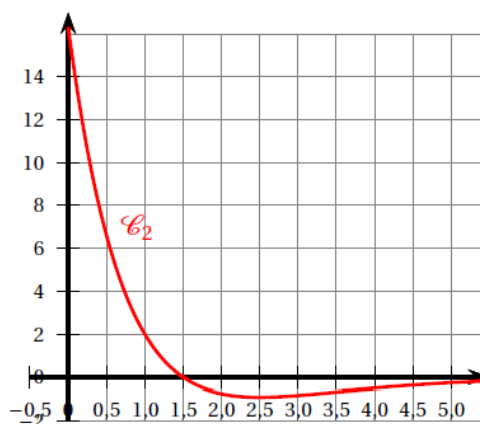
La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\frac{5}{2}$.



1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 5]$.
2. Que semble présenter la courbe $\mathcal{C}$ au point A?
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous. Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente. Ce choix sera justifié.

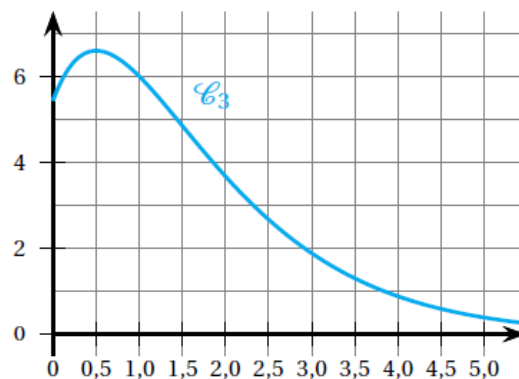


Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$

4. La courbe $\mathcal{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0; +\infty[$ d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f , définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$, est définie par :

$$f(x) = (4x - 2)e^{-x+1}$$

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f .

1. Étude de la fonction f

- a. Montrer que $f'(x) = (-4x + 6)e^{-x+1}$.
- b. Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- c. Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f .

2. On considère une fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par $F(x) = (ax + b)e^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.

- a. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

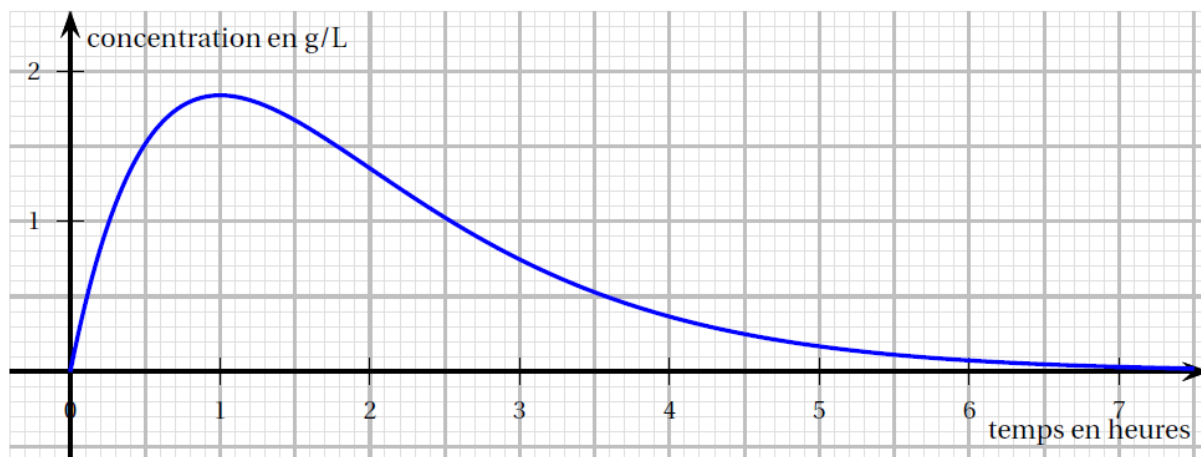
(... fin hors programme pour l'instant)

Sujet 3: Amérique du sud – nov 2025

On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament.

On admet que la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie A : lectures graphiques



On a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction f . Avec la précision permise par le graphique, donner sans justification :

1. Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geq 1$.
3. La convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 8]$.

Partie B : détermination de la fonction f

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = 5e^{-t}$, d'inconnue y , où y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On admet que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E) .

1. Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.
2. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $u(t) = ate^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction u soit solution de l'équation (E) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .
4. La personne n'ayant pas pris ce médicament auparavant, on admet que $f(0) = 0$.
Déterminer l'expression de la fonction f .

Partie C : étude de la fonction f

Dans cette partie, on admet que f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 5te^{-t}$.

1. (question hors programme pour l'instant) On admet que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation complet.
3. Démontrer qu'il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$.
On donnera une valeur approchée à 10^{-2} des réels t_1 et t_2 .
4. Pour une concentration du médicament supérieure ou égale à 1 gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence.
Quelle est la durée en heures et minutes du risque de somnolence lors de la prise de ce médicament ?

(Suite de la question hors programme pour l'instant)

Sujet 4 : Polynésie 1 – septembre 2025

On étudie l'évolution de la population d'une espèce animale au sein d'une réserve naturelle. Les effectifs de cette population ont été recensés à différentes années. Les données collectées sont présentées dans le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100

Pour anticiper l'évolution de cette population, la direction de la réserve a choisi de modéliser le nombre d'individus en fonction du temps. Pour cela, elle utilise une fonction, définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, dont la variable x représente le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2000.

Dans son modèle, l'image de 0 par cette fonction vaut 50, ce qui correspond au nombre d'individus en l'an 2000.

Partie A. Modèle 1

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0,05y - 0,5 \quad (E_1)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.
2. Comparer les résultats du tableau avec ceux que l'on obtiendrait avec ce modèle.

Partie B. Modèle 2

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0,05y(1 - 0,00125y) \quad (E_2)$$

On note f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$, par : $f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.

Pour toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser ces résultats sans les démontrer, sauf pour la question 5.

	Instruction	Résultat
1	$f(x) := \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$	$f(x) = \frac{800}{1 + 15e^{-0,05x}}$
2	$f'(x) := \text{Dérivée} (f(x))$	$f'(x) = \frac{600e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^2}$
3	$f''(x) := \text{Dérivée} (f'(x))$	$f''(x) = \frac{30e^{-0,05x}}{(1 + 15e^{-0,05x})^3} (15e^{-0,05x} - 1)$
4	Résoudre ($15e^{-0,05x} - 1 \geq 0$)	$x \leq 20\ln(15)$

1. Démontrer que la fonction f vérifie $f(0) = 50$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 0,05f(x)(1 - 0,00125f(x))$$

On admet que cette fonction f est l'unique solution de (E_2) prenant la valeur initiale de 50 en 0.

2. Avec ce nouveau modèle f , estimer l'effectif de cette population en 2050. Arrondir le résultat à l'unité.

3. (Question hors programme pour l'instant) On admet que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 800. Interpréter cette limite dans le cadre de ce problème concret.

4. Justifier que la fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

5. Démontrer le résultat obtenu en ligne 4 du logiciel.

6. On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f' .

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C .

b. La direction de la réserve affirme : «Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ».

La direction a-t-elle raison? Justifier.

Sujet 5 : Centres étrangers 1 – juin 2025

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250},$$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $h(t) = \frac{1}{120}$.
Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1) .

2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1) .

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.

À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu.

On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t , exprimé en heure. On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle

$$(E_2) : p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2) , alors y est solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.

2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1) , alors $p = \frac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2) .

Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$p(t) = \frac{120}{1 + Ke^{-0,48t}}$$

avec K une constante réelle.

3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K .

4. (Question hors programme pour l'instant) On admet que la limite de la fonction p en $+\infty$ est égale à 120.
En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.
On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.