Exercice 6 : Suites arithmético-géométriques

1) On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et telle que $u_{n+1} = 5u_n + 8$ pour tout entier naturel n.
On considère la suite (v_n) définie par :
$v_n = u_n + 2$ pour tout entier naturel n.

a. Calculer u_1, u_2, u_3 puis $v_0, v_1, v_2 et\ v_3$

b. Montrer que la suite (v_n) est géométrique

c. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n

d. En déduire l'expression de u_n en fonction de n

2) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = 1{,}6u_n - 15 \\ u_0 = 800 \end{cases}$

On définit suite (v_n) pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - 25$$

a. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3) Soit la suite (u_n) définie pour tout n par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \\ u_0 = 6 \end{cases}$

On admet que, pour tout n, on a $u_n \neq 2$

Soit la suite (v_n)définie pour tout n par : $v_n = u_n - 2$

a. Calculer les 3 premiers termes des suites u et v

b. Montrer que la suite v est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

c. Exprimer v_n en fonction de n

d. En déduire l'expression de u_n en fonction de n

Un peu plus...

4) Le responsable du foyer des jeunes d'un village a décidé d'organiser une brocante annuelle. Pour la première brocante, en 2012, il a recueilli 110 inscriptions. D'après les renseignements pris auprès d'autres organisateurs dans les villages voisins, il estime que d'une année sur l'autre, 90 % des exposants se réinscriront et que 30 nouvelles demandes seront déposées.
On désigne par u_n le nombre d'exposants en (2012+n) avec n un entier naturel.
Ainsi u_0 est le nombre d'exposants en 2012, soit $u_0 = 110$.

a. Quel est le nombre d'exposants attendu pour 2013 ?

b. Justifier que, pour tout entier n , $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 30$.

c. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 300$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.

d. En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n

Exercice 7 : Autres suites

1) Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1} \\ u_0 = -1 \end{cases}$

et (v_n) définie pour tout n par : $v_n = \frac{1}{u_n}$.

On admet que, pour tout n, on a $u_n \neq -\frac{1}{2}$ et $u_n \neq 0$

a. Calculer les 3 premiers termes des suites u et v

b. Démontrer que la suite v est arithmétique de raison 2

c. Exprimer $v_n$en fonction de n

d. En déduire l'expression de u_n en fonction de n

2) Soit les suites (a_n) et (b_n) définies pour tout n par : $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$ et $b_n = a_n - n$

a. Démontrer que (b_n) est géométrique

b. Exprimer a_n en fonction de n

Un peu plus...

3) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

a. Calculer les valeurs exactes de u_1, v_1, u_2 et v_2

On pose $a_n = v_n - u_n$ et $b_n = \frac{u_n+2v_n}{3}$

b. Montrer que (a_n) est une suite géométrique et que (b_n) est une suite stationnaire

c. Déterminer l'expression de a_n et de b_n en fonction de n

d. En déduire l'expression de u_n puis de v_n en fonction de n