

Corrections Sujet type bac

Corrigé Entraînement 1

1. a. $u_1 = 0,4 \times 115 + 120 = 166$ $u_2 = 0,4 \times 166 + 120 \approx 186$

On donne les résultats à l'unité près, puisqu'il s'agit de nombres d'oiseaux

b. $u_{n+1} = 0,4 u_n + 120$

2. a. $v_n = u_n - 200 \Leftrightarrow u_n = v_n + 200$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 200 = 0,4 u_n + 120 - 200 = 0,4 (v_n + 200) - 80 = 0,4 v_n + 80 - 80 \quad \text{Donc} \quad v_{n+1} = 0,4 v_n$$

Il s'agit bien d'une suite géométrique de raison 0,4

On a $v_0 = u_0 - 200 = 115 - 200 = -85$

b. $v_n = v_0 \times q^n = -85 \times 0,4^n$

c. $u_n = v_n + 200 = -85 \times 0,4^n + 200$ CQFD

d. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,4^n = 0$ car $0,4 \in]-4; 1[$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -85 \times 0 + 200 = 200$

La capacité d'accueil du centre serait donc suffisante selon ce modèle, puisque le nombre d'oiseaux ne devrait jamais dépasser 200.

Corrigé Entraînement 2

1. a. $a_1 = \frac{80}{100} \times 2\,500 + 400 = 2\,400$ et $a_2 = 0,8 \times 2\,400 + 400 = 2\,320$

b. Dire qu'il reste 80% des anciens inscrits revient à multiplier le nombre d'inscrits par 0,8 (Soit $0,8a_n$).
Comme on ajoute 400 inscrits chaque année, on a bien $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400$.

2. $v_n = a_n - 2\,000 \Leftrightarrow a_n = v_n + 2\,000$

a. $v_{n+1} = a_{n+1} - 2\,000 = 0,8a_n + 400 - 2\,000 = 0,8(v_n + 2\,000) - 1\,600 = 0,8v_n + 1\,600 - 1\,600$

Donc $v_{n+1} = 0,8v_n \Rightarrow$ La suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison 0,8

On a $v_0 = a_0 - 2\,000 = 2\,500 - 2\,000 = 500$

b. On a $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,8^n \Rightarrow$ Donc $a_n = v_n + 2\,000 = 500 \times 0,8^n + 2\,000$ CQFD

c. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 500 \times 0 + 2\,000 = 2\,000$

d. La médiathèque va perdre des adhérents, mais sans que ce nombre tombe jamais en dessous de 2 000

Corrigé Entraînement 3

1. a. $u_1 = 50\,000 \times (1 - \frac{5}{100}) + 3\,000 = 50\,500 \Rightarrow$ Il y aurait **50 500 arbres en 2014**

b. Couper 5% des arbres revient à **garder 95% des arbres de l'année précédente, c'est-à-dire multiplier par 0,95** (soit $0,95u_n$). Si on replante chaque année 3 000 arbres, on a bien $u_{n+1} = 0,95u_n + 3000$.

2. a. $v_{n+1} = 60\,000 - u_{n+1} = 60\,000 - (0,95u_n + 3\,000) = 60\,000 - 0,95u_n - 3\,000 = 57\,000 - 0,95(60\,000 - v_n)$
 $= 57\,000 - 57\,000 + 0,95v_n$

Donc $v_{n+1} = 0,95v_n$

$\Rightarrow$ **La suite v est bien une suite géométrique de raison 0,95 de 1^{er} terme** $v_0 = 60\,000 - u_0 = 10\,000$

b. $v_n = v_0 \times q^n = 10\,000 \times 0,95^n$

c. Donc $u_n = 60\,000 - v_n = 60\,000 - 10\,000 \times 0,95^n = 10000 \times (6 - 0,95^n)$ CQFD

d. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10\,000(6 - 0) = 60\,000$

e. Le nombre d'arbre de la forêt va augmentant, **mais ne dépassera jamais les 60 000.**

3. a. On trouve $u_{23} \simeq 56\,926$ et $u_{24} \simeq 57\,080 \Rightarrow$ à partir de **$n = 24$**

b. **La forêt comptera plus de 57 000 arbres à partir de 2037**

Corrigé Entraînement 4*

1. La somme $g_n + p_n$ correspond à la totalité de la population de la ville la n -ième année de l'existence du club (soit on est inscrit, soit on ne l'est pas). On a donc **$g_n + p_n = 1$**

2. a. Garder 30% du nombre d'inscrits de l'année précédente revient à multiplier par 0,3 (soit **$0,3g_n$**).

Prendre 10% de la population non inscrite revient à multiplier ce nombre par 0,1 (soit **$0,1p_n$**)

On a bien **$g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1p_n$**

b. Comme $g_n + p_n = 1$, on a **$p_n = 1 - g_n$**

$g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1p_n \Leftrightarrow g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1(1 - g_n) \Leftrightarrow g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1 - 0,1g_n \Leftrightarrow g_{n+1} = 0,2g_n + 0,1$
CQFD

3. $u_n = g_n - 0,125 \Leftrightarrow g_n = u_n + 0,125$

$u_{n+1} = g_{n+1} - 0,125 = 0,2g_n + 0,1 - 0,125 = 0,2(u_n + 0,125) - 0,025 = 0,2u_n + 0,025 - 0,025$

Donc **$u_{n+1} = 0,2u_n$**

La suite (u_n) est une suite géométrique de **raison 0,2** et de 1^{er} terme $u_0 = g_0 - 0,125 = 0,075$

4. $q = 0,2 \in]0 ; 1[$ donc la suite (u_n) est décroissante

5. On a $u_n = u_0 \times q^n = 0,075 \times 0,2^n$ Donc **$g = u_n + 0,125 = 0,075 \times 0,2^n + 0,125$** CQFD

La proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique décroît au cours des années

Corrigé vers le supérieur

$$1. v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + \frac{b(1-a)-b}{1-a} = au_n - \frac{ab}{1-a} \quad \text{Or } u_n = v_n + \frac{b}{1-a}$$

$$\text{Donc } v_{n+1} = a \left(v_n + \frac{b}{1-a} \right) - \frac{ab}{1-a} = av_n + \frac{ab}{1-a} - \frac{ab}{1-a} = av_n$$

La suite (v_n) est bien géométrique de raison a .

$$2. \text{ On a } v_0 = u_0 - \frac{b}{1-a} \text{ et } v_n = v_0 \times a^n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) \times a^n$$

$$\text{Donc } u_n = v_n + \frac{b}{1-a} = \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$\text{Or, si } a \in]-1; 1[, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0 \text{ et par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) \times 0 + \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-a}$$

CQFD