# Savoirs Vp.2 : Vecteur normal, équation cartésienne de plan

## Exercice 5 : Vecteur normal

**1)** On donne $A(3;0;1)$ ; $B(1;2;5)$ et $C(1;-2;-1)$

**a)** Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ définissent un plan $\mathcal{P}$

**b)** Montrer que le vecteur $\vec{u}(1;-3;2)$ est normal au plan $\mathcal{P}$

**c)** Déterminer un autre vecteur normal à $\mathcal{P}$

**2)** Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $D(4;2;-1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(-2;0;1)$ et $\vec{v}(1;-1;3)$
Montrer que le vecteur $\vec{n}(1;7;2)$ est normal au plan $\mathcal{P}$

**3)** Soit $ABCDEFGH$ un cube. Soient $I$ et $J$ les points tels que $\overrightarrow{EI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$

**a)** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{BG}$ est normal au plan $(DEF)$, sans utiliser de repère.

**b)** En se plaçant dans le repère $(E;\ \overrightarrow{EF};\ \overrightarrow{EH};\ \overrightarrow{EA})$, montrer que le vecteur $\overrightarrow{GJ}$ est normal au plan $(HDI)$

**4)** Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(2;0;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;-1;2)$.
Les points $B(-1;-3;1)$ et $C(0;1;4)$ appartiennent-ils au plan $\mathcal{P}$ ?

**5)** Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. Soient $I$ et $J$ les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EH]$, et K le centre de la face $CDHG$. Démontrer que $\overrightarrow{FK}$ est un vecteur normal au plan $(AIJ)$.

**6)** Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ les plans dont les représentations paramétriques sont :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = 4t - 2t' + 1 \\ y = -5t - 2t' - 1 \\ z = -3t + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}\ et\ t' \in \mathbb{R} \quad et \quad \mathcal{P}' : \begin{cases} x = t - t' - 1 \\ y = 3t + t' + 3 \\ z = -2t + t' - 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}\ et\ t' \in \mathbb{R}$$

Le vecteur $\vec{n}(1;-1;3)$ est-il un vecteur normal à $\mathcal{P}$ ? et à $\mathcal{P}'$ ?

**7)** Trouver un vecteur qui soit normal au plan dirigé par les vecteurs $\vec{u}(-2;3;6)$ et $\vec{v}(1;0;5)$

## Exercice 6 : Droites et plans orthogonaux

1) $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}(2;-3;1)$ et $\mathcal{P}'$ de vecteur normal $\overrightarrow{n'}(5;4;2)$. $\Pi$ de vecteur normal $\vec{v}\left(-5;\frac{15}{2};-\frac{5}{2}\right)$.

a) Quelle est la position relative de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$ ?

b) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\Pi$ sont parallèles .

2) On considère les points $A(-1;3;4)$ et $B(5;3;13)$. Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}(2;0;3)$.
Montrer que $(AB)$ est orthogonale à $\mathcal{P}$

3) On considère les points $R(1;-1;3)$ ; $S(-2;0;1)$ ; $T(0;3;-1)$ et $U(-4;5;2)$

a) Montrer que le vecteur $\vec{n}(-4;10;11)$ est normal au plan $(RST)$

b) Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $U$ de vecteur normal $\vec{a}(1;-4;4)$. Quelle est la position relative de $\mathcal{P}$ et $(RST)$ ?

c) Soit $\mathcal{P}'$ le plan passant par $U$ de vecteur normal $\vec{b}\left(1;-\frac{5}{2};-\frac{11}{4}\right)$. Quelle position relative de $\mathcal{P}'$ et $(RST)$ ?

4) Soit $\Pi$ le plan passant par le point $M(1;5;-3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;0;-1)$.
Soit $d$ la droite passant par les point $M$ et $N(2;5;2)$. La droite $d$ est-elle orthogonale au plan $\Pi$ ?

## Exercice 7 : Déterminer l'équation cartésienne d'un plan

1) Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(2;-1;4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-1;-3;2)$.
   a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$
   b) Les points $B(0;-1;3)$ et $C(-1;3;-1)$ appartiennent-ils au plan $\mathcal{P}$ ?

2) On donne $D(-4;-1;3)$et $E(2;1;0)$ .
   Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $D$ et perpendiculaire à $(DE)$

3) On considère les points $R(1;-1;4)$ ; $S(2;-3;0)$ et $T(2;-1;5)$
   a) Montrer que ces 3 points définissent un plan
   b) Montrer que le vecteur $\vec{n}(2;5;-2)$ est normal au plan $(RST)$
   c) En déduire une équation cartésienne du plan $(RST)$

4) Dans un cube $ABCDEFGH$, on se place dans le repère $\left(D;\ \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$
   a) Déterminer un vecteur normal au plan $(ABE)$, et en donner une équation cartésienne
   b) Déterminer un vecteur normal au plan $(DHE)$, et en donner une équation cartésienne
   c) Déterminer un vecteur normal au plan $(HFG)$, et en donner une équation cartésienne

5) Dans le cube $ABCDEFGH$, on se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Les points $I, J$ et $K$ sont les milieux respectifs des côtés $[AB], [EH]$ et $[CB]$
   a) Démontrer que la droite $(FD)$ est orthogonale au plan $(IJK)$
   b) En déduire une équation cartésienne de $(IJK)$

6) On considère les points $A(1;-1;1)$ ; $B(-2;1;8)$ et $C(7;3;3)$
   On admet que les points $A$, $B$ et $C$ forment un plan
   On pose pour équation cartésienne du plan $(ABC)$ : $ax+by+cz+d=0$ où $a, b, c$ et $d$ sont des réels.
   a) Traduire par une équation en $a, b, c$ et $d$ le fait que le point $A$ appartiennent au plan $(ABC)$
   b) Montrer que les nombres $a, b, c$ et $d$ sont solution du système $\begin{cases} a-b+c+d=0 \\ -2a+b+8c+d=0 \\ 7a+3b+3c+d=0 \end{cases}$
   c) On pose $a=1$. En déduire une équation cartésienne du plan $(ABC)$

## Exercice 8 : Déduire des informations de l'équation cartésienne

1) Soit $\mathcal{P}'$ le plan d'équation cartésienne $2x-3y-1=0$
   a) Donner un vecteur normal à $\mathcal{P}'$
   b) Déterminer un point de $\mathcal{P}'$
   c) Donner une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathcal{P}'$ et passant par $M(2;0;0)$

2) Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(3;0;-1)$ et parallèle au plan d'équation $x-3y+2z-4=0$

3) Dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x+y+4z-8=0$.
   a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection avec les 3 axes du repère
   b) Représenter ce plan dans le repère

4) Le vecteur $\vec{n}\left(-1;\frac{4}{3};-4\right)$ est-il un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}+z-1=0$ ?