Dépassement de seuil

Savoir S.5

1) Trouver la bonne inégalité

Méthode : Quand on demande : « Pour quel rang la suite (u_n) dépasse-t-elle le seuil $S = \cdots$ », on demande de résoudre une inéquation. Pour savoir quelle est le sens de l'inégalité, c'est-à-dire si la suite devient supérieur à ce seuil S ou inférieur à ce seuil S, **il faut connaître le sens de variation de la suite**

- **Si (u_n) est croissante, on cherche à résoudre $u_n \geq s$**
- **Si (u_n) est décroissante, on cherche à résoudre $u_n \leq s$**

2) Suite arithmétique : Résolution directe

Méthode : Soit (u_n) arithmétique de raison R et de 1[er] terme u_0. On a $u_n = u_0 + Rn$
On cherche donc à résoudre $\boldsymbol{u_n \geq S}$ ou $\boldsymbol{u_n \leq S}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{u_0 + Rn \geq S}$ ou $\boldsymbol{u_0 + Rn \leq S}$

Exemples :

♦ (u_n) suite arithmétique de raison 25 et de 1[er] terme $u_0 = 14$. À partir de quel rang dépasse-t-elle 300 ?

Sens de variation de u_n : la raison est positive, donc la suite est **croissante :** on cherche $\boldsymbol{u_n \geq 300}$
Expression de u_n : $u_n = u_0 + Rn = 14 + 25n$
Résolution inéquation : $u_n \geq 300 \iff 14 + 25n \geq 300 \iff 25n \geq 286 \iff n \geq \frac{286}{25}$
on a $\frac{286}{25} = 11{,}44$ donc, dans $\mathbb{N}$, on a $n \geq 12$

La suite dépasse 300 à partir du rang 12

♦ (a_n) suite arithmétique de raison -0,25 et de 1[er] terme $a_1 = 1{,}3$.
À partir de quel rang la suite devient-elle négative ?

Sens de variation de a_n : la raison est négative, donc la suite est dé**croissante :** on cherche $\boldsymbol{a_n \leq 0}$
Expression de a_n : $a_n = a_1 + R(n-1) = 1{,}3 - 0{,}25(n-1) = 1{,}3 - 0{,}25n + 0{,}25 = 1{,}55 - 0{,}25n$
Résolution inéquation : $a_n \leq 0 \iff 1{,}55 - 0{,}25n \leq 0 \iff -0{,}25n \leq -1{,}55 \iff n \geq \frac{-1{,}55}{-0{,}25}$
on a $\frac{-1{,}55}{-0{,}25} = 6{,}2$ donc, dans $\mathbb{N}$, on a $n \geq 7$

La suite devient négative à partir du rang 7

3) Suite géométrique : Résolution à la calculatrice

Méthode : Il existe une méthode de résolution analytique que vous découvrirez plus tard.
On cherche donc à résoudre $\boldsymbol{u_n \geq S}$ ou $\boldsymbol{u_n \leq S}$
Soit (u_n) géométrique de raison q et de 1[er] terme u_0. On a $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_{n+1} = qu_n$
En utilisant une des 2 formules, on calcul les 1[er] termes de la suite.
On repère le 1[er] terme $\boldsymbol{u_{n_S}}$ à partir duquel le seuil S est dépassé (on justifie en donnant le terme d'avant et le terme u_{n_S}). La solution est $\boldsymbol{n \geq n_S}$

Exemples :

♦ (u_n) suite géométrique de raison 5 et de 1[er] terme $u_0 = 0{,}4$. À partir de quel rang dépasse-t-elle 1 000?

Sens de variation de u_n : $u_0 \geq 0$ et $q > 1$, donc la suite est **croissante :** on cherche $\boldsymbol{u_n \geq 1000}$
Termes encadrant : à la calculatrice, on trouve $u_4 = 250 < 1\,000$ et $u_5 = 1\,250 > 1\,000$
Résolution inéquation : donc, dans $\mathbb{N}$, $n \geq 5 \Rightarrow$ **La suite dépasse 1 000 à partir du rang 5**

♦ (a_n) suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1[er] terme $a_1 = 4\,520$. À partir de quel rang la suite passe-t-elle le seuil de 1 ?

Sens de variation de a_n : $a_1 \geq 0$ et $0 < q < 1$, donc la suite est **décroissante :** on cherche $\boldsymbol{a_n \leq 1}$
Termes encadrant : à la calculatrice, on trouve $a_8 \simeq 2 > 1$ et $a_9 \simeq 0{,}7 < 1$
(attention au réglage : il faut bien commencer en a_1)
Résolution inéquation : donc, dans $\mathbb{N}$, $n \geq 9 \Rightarrow$ **La suite passe sous 1 à partir du rang 9**