Exercice 15 : Variations d'une fonction

1) Polynôme

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x - 7$$

a) Calculer $f'(x)$

b) Déterminer le tableau de signe de f'

c) En déduire le tableau de variation de f

d) Compléter ce tableau en rajoutant les valeurs des extrema

2) Expression rationnelle

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + 6 + \frac{4}{x}$

a) Montrer que, pour $x \neq 0$, on a : $f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$

b) Étudier le signe de f' et en déduire le tableau de variation complet de f

3) Exponentielles

On définit la fonction g définie sur [−2 ; 1] par :

$$g(x) = e^{-2x^2}$$

a) Calculer $g'(x)$

b) En déduire le tableau de variation complet de g

4) Logarithme népérien

On considère la fonction f définie sur [1 ; 10] par :
$f(x) = 3x^2 - 21x + 3 - 12\ln x$

a) Démontrer que l'on a : $f'(x) = \frac{3(x-4)(2x+1)}{x}$

b) Dresser le tableau de variation de $f(x)$ sur [1 ; 10].

Pour préparer le contrôle ...

1) Polynôme

On définit la fonction g sur $[0; 5]$ par

$$g(x) = \frac{2x^3}{3} - 6x^2 + 18x - 1$$

a) Dériver g

b) En déduire le tableau de variation de g

2) Expressions rationnelles

On définit la fonction h sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = 5 - \frac{1}{4x} + 2x$$

a) Montrer que $h'(x) = \frac{1+8x^2}{4x^2}$

b) Justifier que la fonction h est croissante sur $]0; +\infty[$

3) Exponentielles

On définit la fonction A sur $[0; 20]$ par :

$$A(t) = 10e^{-0,05t^2+0,8t}$$

a) Calculer $A'(t)$.

b) En déduire le tableau de variation complet de A sur $[0; 20]$

4) Logarithme népérien

Soit f la fonction définie sur $[0; 5]$ par :
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x^2 + 1)$

a) Montrer que $f'(x) = \frac{x(x^2-1)}{x^2+1}$

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; 5]$

Exercice 16 : Polynôme de degré 4…

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} - 5x^2 + 12x + 1$

1) a. Calculer $f'(x)$

b. Montrer que $f'(x) = 2(x-3)(x^2 + x - 2)$

2) a. Établir le tableau de signe de la dérivée f'

b. En déduire le tableau de variation de la fonction f

Exercice 17 : Inégalités et encadrements

1) La fonction b, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$b(x) = x^5 - 15x^3$$

a) Déterminer le signe de la dérivée $b'(x)$

b) Montrer que, pour $x \in [-3\ ;\ 0]$, on a :

$$0 \leq b(x) \leq 162$$

2) La fonction f est définie sur [0 ; 20] par :

$$f(x) = (5x - 5)e^{-0,2x}$$

a. Démontrer que $f'(x) = (-x + 6)e^{-0,2x}$ pour tout $x \in$ [0 ; 20].

b. Dresser le tableau de variations de f sur [0 ; 20]. On fera apparaître les valeurs exactes.

c. Justifier que, pour $x \in [0; 20]$, on a $f(x) \leq 8$

3) On considère la fonction h définie sur]0 ; 1[par :

$$h(x) = \ln(x - x^2)$$

a) Déterminer l'expression de la dérivée h' de h.

b) Dresser le tableau de signe de $h'(x)$ sur]0 ; 1[

c) Justifier si h admet un minimum ou un maximum sur]0 ; 1[

Pour préparer le contrôle ...

1) La fonction t, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$t(x) = x^4 - 8x^2 + 6$$

a. Montrer que t a pour dérivée $t'(x) = 4x(x^2 - 4)$

b . Montrer qu'il existe un réel m tel que $t(x) \geq m$ pour tout réel x

2) On considère la fonction ϕ définie sur [-1 ;1] par :

$$\phi(t) = e^{1-t^2}$$

a. Déterminer le tableau de variation de $\phi(t)$

b. Justifier que, pour $t \in [-1; 1]$, on a :

$$1 \leq \phi(t) \leq 3$$

3) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

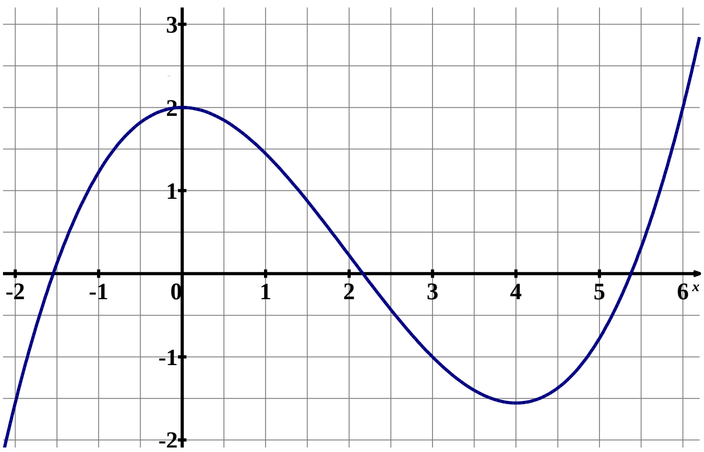
$$g(x) = x + 6 + \frac{9}{x}$$

Montrer que, pour $x \in [-6\ ;\ -1]$, on a

$$g(x) \in [-4\ ;\ 0]$$

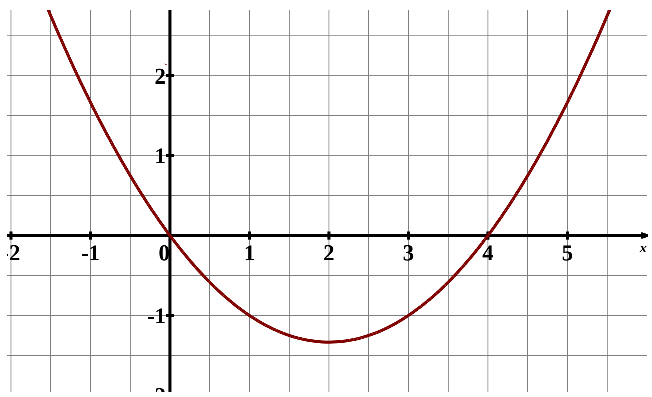
Exercice 18 (1) : Lien graphique entre fonction et dérivée

1) La courbe ci-dessous ⇓ représente une fonction f définie sur l'intervalle [−2 ; 6]



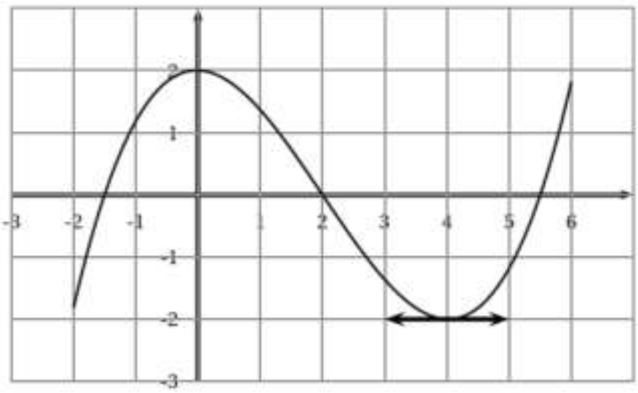
La fonction f est dérivable sur [−2 ; 6] et on note f' sa dérivée.

La courbe ci-dessous ⇓ peut-elle représenter cette dérivée f'



Attention, l'exercice 18 continue page suivante

Exercice 18 (2) : Suite

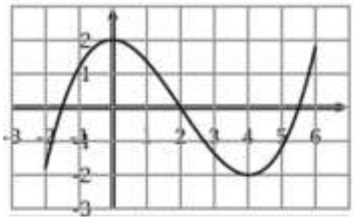


2) La courbe ci-contre représente une fonction g définie sur l'intervalle $[-2 ; 6]$

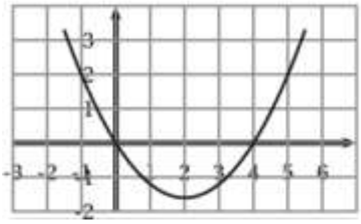
Question 1

On note g' la dérivée de la fonction g.
Parmi les 4 courbes données ci-dessous, indiquer laquelle peut représenter g'

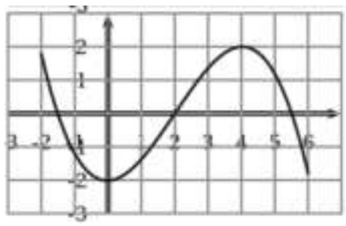
Réponse A



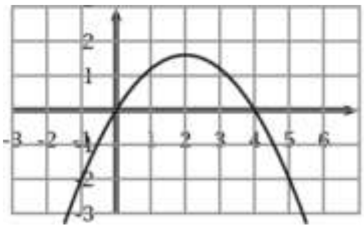
Réponse B



Réponse C



Réponse D



Question 2 : Le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $[-2 ; 6]$ est :

Réponse A : 0 **Réponse B :** 1 **Réponse C :** 2 **Réponse D :** 3

Question 3 : Le nombre de solutions de l'équation $g'(x) = 0$ sur l'intervalle $[-2 ; 6]$ est :

Réponse A : 0 **Réponse B :** 1 **Réponse C :** 2 **Réponse D :** 3