

Savoir SL. 2 - Rappels sur les suites

Entraînement 1

1) Soit (u_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1^{er} terme $u_0 = 12$ et (v_n) une suite arithmétique de raison -4 et de 1^{er} terme $v_2 = 100$. Déterminer les expressions de u_n et de v_n en fonction de n .

2) On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence :
$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,3 u_n - 7,8 \\ u_1 = 160 \end{cases}$$
 Déterminer le rang à partir duquel u_n passe au-dessus de 20 000.

3) À l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de 1 500 m² entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50 m² et la remplace par du gazon.

Pour tout nombre entier naturel n , on note u_n la surface en m² de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à-dire à l'automne 2010 + n . On a donc $u_0 = 1 500$.

a. Calculer u_1

b. Pour tout nombre entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

Entraînement 2

1) Soit (a_n) une suite géométrique de raison $\frac{5}{2}$ et de 1^{er} terme $a_1 = 3$ et (b_n) une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme $b_0 = -\frac{7}{2}$. Déterminer les expressions de a_n et de b_n en fonction de n .

2) On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence :
$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,2u_n - 5 \\ u_0 = 60 \end{cases}$$
 Déterminer le rang à partir duquel u_n dépasse la valeur $M = 600$.

3) Une retenue d'eau artificielle contient 100 000 m³ d'eau le 1^{er} juillet 2013 au matin.

La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4% du volume total de l'eau par jour. De plus, chaque soir, on doit libérer de la retenue 500 m³ pour l'irrigation des cultures aux alentours. Cette situation peut être modélisée par une suite (V_n) .

Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m³ est $V_0 = 100 000$.

Pour tout entier naturel n supérieur à 0, V_n désigne le volume d'eau en m³ au matin du n -ième jour qui suit le 1^{er} juillet 2013.

a. Justifier que le volume d'eau V_1 au matin du 2 juillet 2013 est égal à 95 500 m³.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $V_{n+1} = 0,96V_n - 500$.

Entraînement 3

1) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 45 et de 1^{er} terme $u_1 = 20$ et (v_n) une suite géométrique de raison 0,62 et de 1^{er} terme $v_0 = 1200$. Déterminer les expressions de u_n et de v_n en fonction de n .

2) On considère la suite (v_n) définie par la relation de récurrence :
$$\begin{cases} v_{n+1} = 0,8v_n + 3 \\ v_1 = 3,6 \end{cases}$$

Déterminer le rang à partir duquel v_n dépasse la valeur $M = 14,8$.

3) On étudie l'évolution de la population d'une ville, depuis le 1^{er} janvier 2008.

On admet que la population augmente de 3,5 % par an depuis le 1^{er} janvier 2008.

À partir de 2008, on modélise la population de cette ville au 1^{er} janvier à l'aide d'une suite :

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'habitants, exprimé en centaines de milliers d'habitants, au 1^{er} janvier de l'année 2008 + n .

Au 1^{er} janvier 2008, cette ville comptait 100 000 habitants.

a. Que vaut u_0 ?

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1,035^n$.

Entraînement 4

1) Soit (a_n) une suite géométrique de raison $-\frac{3}{4}$ et de 1^{er} terme $a_1 = 1$ et (b_n) une suite stationnaire de 1^{er} terme $b_0 = -1$. Déterminer les expressions de a_n et de b_n en fonction de n .

2) On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence :
$$\begin{cases} u_{n+1} = 0,9u_n - 10 \\ u_0 = 2000 \end{cases}$$

Déterminer le rang à partir duquel u_n passe en-dessous de 100.

3) Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016. Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.

Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1^{er} septembre et le 30 juin)
- les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle à la rentrée de septembre 2016 + n , on a donc $u_0 = 27\,500$.

a. Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.

b. Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.

c. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$.

Entraînement 5

1) Soit (u_n) une suite géométrique de raison 1 et de 1^{er} terme $u_0 = \frac{5}{2}$ et (v_n) une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$ et de 1^{er} terme $v_1 = -\frac{3}{4}$.

Déterminer les expressions de u_n et de v_n en fonction de n .

2) La suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,25 et de premier terme $w_0 = 14\,400$.

À partir de quel rang a-t-on $w_n < 1$? Justifier.

3) La renouée du Japon est une plante à croissance très rapide et très invasive.

Un jardinier souhaite faire disparaître de son terrain cette espèce qui occupe une superficie de 120m^2 au 1^{er} janvier 2017. Pour cela, chaque année au printemps, il procède à un arrachage qui permet de réduire de 10 % la superficie de terrain envahi l'année précédente.

Cependant, cette espèce de plante ayant une puissance de dissémination très importante, de nouvelles pousses apparaissent chaque été et envahissent une nouvelle parcelle de terrain d'une superficie de 4 m^2 .

a. Déterminer la superficie de terrain envahi par cette plante au 1^{er} janvier 2018.

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente la superficie de terrain en m^2 envahi par la Renouée du Japon au 1^{er} janvier de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 120$.

b. Pour tout entier naturel n , Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

Corrigé Savoir SL 2

Corrigé Entraînement 1

1) $u_n = u_0 \times q^n = 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $v_n = v_2 + (n-2)R = 100 - 4(n-2) = 100 - 4n + 8 = 108 - 4n$

2) à la calculatrice, on a : $u_{20} \approx 19\,616$ et $u_{21} \approx 25\,493 \Rightarrow$ Donc u_n passe au-dessus de 20 000 à partir du rang 21

3) a. $u_1 = 1\,500 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) + 50 = 1\,250$

b. Dire qu'il y a 20% de gazon en moins revient à multiplier la surface de l'année précédente par 0,8 (soit $0,8u_n$). Si on ajoute 50 m² de gazon chaque année, on a donc $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$

Corrigé Entraînement 2

1) $a_n = a_1 \times q^{(n-1)} = 3 \times \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}$ et $b_n = b_0 + nR = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}n$

2) On a $u_{15} \approx 564$ et $u_{16} \approx 672$. C'est donc à partir de $n = 16$ qu'on aura $u_n > 600$.

3) a. $V_1 = (1 - 0,04) \times 100\,000 - 500 = 95\,500$

b. La perte de 4% par évaporation revient à multiplier par 0,96 (soit $0,96 \times V_n$) et l'irrigation amène à retirer 500 $\Rightarrow$ on a bien, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 0,96V_n - 500$.

Corrigé Entraînement 3

1) $u_n = u_1 + R(n-1) = 20 + 45(n-1) = 45n - 25$ et $v_n = v_0 \times q^n = 1200 \times 0,62^n$

2) On a $v_{19} \approx 14,795$ et $v_{20} \approx 14,836$. C'est donc à partir de $n = 20$ qu'on aura $v_n > 14,8$.

3) a. $u_0 = 1$ (puisque la suite est exprimée en centaine de milliers d'habitants)

b. Augmenter de 3,5 % revient à multiplier par 1,035 la population de l'année d'avant : on a $u_{n+1} = 1,035u_n$. Il s'agit d'une suite géométrique de raison 1,035 et de premier terme $u_0 = 1$
On a donc $u_n = u_0 \times q^n = 1,035^n$ CQFD

Corrigé Entraînement 4

1) $a_n = a_1 \times q^{n-1} = 1 \times \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ et $b_n = b_0 = -1$

2) On a $u_{22} \approx 107$ et $u_{23} \approx 86$. C'est donc à partir de $n = 23$ qu'on aura $u_n < 100$.

3) a. $27\,500 - 150 = 27\,350 \Rightarrow$ Il y aurait 27 350 étudiants en juin 2017.

b. $27\,350 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 27\,350 \times 1,04 = 28\,444$ étudiants en septembre 2017.

c. En juin de 2016 + n , il y aurait $(u_n - 150)$ étudiants

et en septembre : $1,04(u_n - 150) = 1,04u_n - 156 \Rightarrow$ On a bien $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$.

Corrigé Entraînement 5

1) $u_n = u_0 \times q^n = \frac{5}{2} \times 1^n = \frac{5}{2}$ suite stationnaire et $v_n = v_1 \times q^{n-1} = -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 3 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

2) $w_{n+1} = 0,25 \times w_n$ On a $w_6 \simeq 3$ et $w_7 \simeq 0,88$ Donc à partir de $n = 7$

3) a. $120 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 4 = 120 \times 0,9 + 4 = 112$

$\Rightarrow$ **112 m² seraient envahis par cette plante au 1^{er} janvier 2018.**

b. Réduire de 10 % revient à multiplier par 0,9 la superficie d'une année sur l'autre (soit $0,9u_n$), et on ajoute 4 chaque année. On a donc $u_{n+1} = 0,9u_n + 4$.