Corrections Savoir Ft. 3

Corrigé Exercice 8

1) a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ donc $\boldsymbol{S} = \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$
et $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ donc $\boldsymbol{S} = \{-\pi; 0; \pi\}$

b) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1$ donc $\boldsymbol{S} = \{0\}$
et $g(x) = -1 \Leftrightarrow \sin x = -1$ donc $\boldsymbol{S} = \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$

2) a) $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ donc $\boldsymbol{S} = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$
et $i(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\boldsymbol{S} = \left\{-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right\}$

b) $h(0) = \frac{1}{2} - \cos 0 = \frac{1}{2} - 1 = -\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ et $i(0) = 2\sin 0 + \sqrt{3} = 2 \times 0 + \sqrt{3} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

3) a) $j(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\boldsymbol{S} = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
et $k(x) \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 0 \Leftrightarrow -\pi \leq x \leq 0$ donc $\boldsymbol{S} = [-\pi; 0]$

b) $j(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{4}$ donc $\boldsymbol{S} = \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$
et $k(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6}$ ou $-\frac{\pi}{6}$ donc $\boldsymbol{S} = \left\{-\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}\right\}$

4) a) $l(x) < 0 \Leftrightarrow 2\cos x + 1 < 0 \Leftrightarrow \cos x < -\frac{1}{2}$ donc $\boldsymbol{S} = \left[-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$
et $m(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 1$ donc $\boldsymbol{S} = [-\pi; \pi]$

b) $l\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 2 \times 0 + 1 = \mathbf{1}$ et $m\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$

5) La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ avec $\frac{1}{4} \in \left[\sin 0 ; \sin\frac{\pi}{2}\right]$.
D'après **le théorème des valeurs intermédiaires,** l'équation $\sin x = \frac{1}{4}$ admet une unique solution α sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
À la calculatrice, on trouve : $\boldsymbol{\alpha \simeq 0,25}$

Remarque importante *(surtout pour les allergiques du TVi) : il existe dans vos souvenirs de 3ème une fonction réciproque du sinus, le « sin⁻¹ » ou l'« Arcsin » selon les calculatrices, qui permet de trouver la solution de l'équation sans manipulations… Du genre* $\sin\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \simeq 0{,}25268025551\ rad$ *… ou* $Asin\left(\frac{1}{4}\right)$
Pareil pour $\cos x = 0{,}6 \Rightarrow x = \cos^{-1}(0{,}6) \simeq 0{,}92729\ rad$
Attention, les résultats sont en radians si la calculatrice est réglée en radian, et en degrés si la calculatrice est en degré… et alors $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \simeq 14{,}48°$ …

Corrigé Exercice 9

1) a) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos x + \sqrt{2} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos x \geq -\sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; \cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) sur $[-\pi;\pi]$ on a $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$

x	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f(x)$		$-$	**0**	$+$	**0**	$-$	

2) $\sqrt{3} - 2\sin x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f(x)$		$+$	**0**	$-$	**0**	$+$	

$g(x) = 2 - \cos x \geq 0 \;\Leftrightarrow \cos x \leq 2$

x	$-\pi$		π
$g(x)$		$+$	

$h(x)$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$-$	**0**	$+$	|	$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$-$	|	$-$	**0**	$+$	|	$+$	0
$h(x)$	||	$+$	**0**	$-$	||	$+$	**0**	$-$	||

$$2\sin x - 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \sin x \geq \frac{1}{2}$$

$$1 - \sqrt{2}\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$2\sin x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$1 - \sqrt{2}\cos x$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$i(x)$		**−**	**||**	**+**	**0**	**−**	**||**	**+**	**0**	**−**	

3) On pose $Y = \cos x$ on a alors $g(Y) = 2Y^2 - 3Y + 1$ avec $\Delta = 1 \;\; et \;\; Y_1 = 1 \;\; et \;\; Y_2 = \frac{1}{2}$

Or un polynôme du 2nd degré est du signe de a (ici positif) à l'extérieur de ses racines

On a $g(Y) \geq 0$ pour $Y \leq \frac{1}{2} \;\; et \;\; Y \geq 1$

Donc $g(x)$ est positive pour : $\cos x \leq \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{3} \;\; ou \;\; \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$

et $\cos x \geq 1 \;\Leftrightarrow\; \cos x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

Donc

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
$g(x)$		$+$	**0**	$-$	**0**	$-$	**0**	$+$