

Sujet n°1 : Corrections

Corrigé sujet 1 - Exercice 1

Partie A

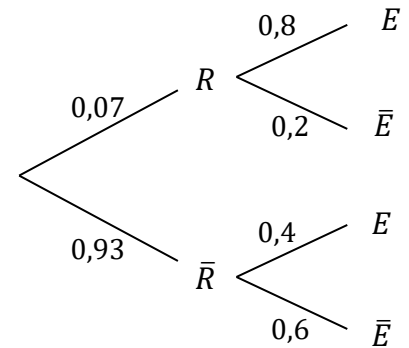
1. $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

2. $p(E) = p(R \cap E) + p(\bar{R} \cap E) = 0,056 + 0,93 \times 0,4 = 0,428$

Il y a 42,8 % de chances de tirer une épée.

3. $p_E(R) = \frac{p(R \cap E)}{p(E)} = \frac{0,056}{0,428} \simeq 0,131$

Sachant que le joueur a tiré une épée, il y a alors environ 13,1 % de chances que ce soit un objet rare.



Partie B

1. Il s'agit de la répétition de 30 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, de probabilité de succès 0,07 : la variable X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 30$ et $p = 0,07$.

Elle a pour espérance : $E(X) = np = 30 \times 0,07 = 2,1$

2. $P(X < 6) = p(X \leq 5) \simeq 0,984$

Il a environ 98,4% de chances d'obtenir moins de 6 objets rares.

3. $P(X \geq k) \geq 0,5 \Leftrightarrow 1 - p(X \leq k - 1) \geq 0,5$

En utilisant le tableur de la calculatrice, on trouve $p(X \geq 2) \simeq 0,631$ et $p(X \geq 3) \simeq 0,351$

Donc la valeur de k cherchée est 2

La probabilité d'obtenir plus de 2 objets rares est encore supérieure à 50%, mais pour trouver plus de 3 objets rares ou plus, la probabilité devient inférieure à 50 %

(autre formulation : après avoir remporté 30 défis, dans au moins 50 % des cas, le joueur aura tiré au moins 2 objets rares...)

4. On cherche le plus petit entier N tel que $p(Y \geq 1) \geq 0,95$ où Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(N; 0,07)$

C'est-à-dire $1 - p(Y = 0) \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - 0,93^N \geq 0,95 \Leftrightarrow -0,93^N \geq -0,05 \Leftrightarrow 0,93^N \leq 0,05$

$$\Leftrightarrow \ln(0,93^N) \leq \ln(0,05) \Leftrightarrow N \ln(0,93) \leq \ln(0,05) \Leftrightarrow N \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)} \quad \text{comme } \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)} \simeq 41,3$$

On trouve $N \geq 42$

Il faudrait que le ticket d'or permette de tirer au minimum 42 objets, pour qu'on ait 95 % de chances d'avoir au moins un objet rare parmi eux.

Corrigé sujet 1 - Exercice 2

Attention au repère $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$!

Le point unité sur l'axe des ordonnées c'est $I(1; 0; 0)$

On a $B(3; 0; 0)$ alors que $D(0; 1; 0)$ et $E(0; 0; 1)$

1. $F(3; 0; 1)$, $H(0; 1; 1)$ et $M\left(\frac{3}{2}; 1; 0\right)$.

2. a. Le plan (HMF) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{On a : } \vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \times \frac{3}{2} + 6 \times 0 + 3 \times (-1) = 3 + 0 - 3 = 0$$

$$\text{Et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{HF} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 - 6 + 0 = 0$$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs directeurs du plan (HMF) : c'est bien un vecteur normal au plan

b. Le plan (HMF) a une équation cartésienne du type : $2x + 6y + 3z + k = 0$

Comme $H \in (HMF)$, on a : $2x_H + 6y_H + 3z_H + k = 0 \Leftrightarrow 6 + 3 + k = 0 \Leftrightarrow k = -9$

On a bien comme équation cartésienne du plan (HMF) : $2x + 6y + 3z - 9 = 0$.

c. Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est : $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$

Mais les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires : en effet on a $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{n}}} = \frac{5}{2}$ mais $\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{n}}} = -1 \neq \frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{n}}}$

Donc les plan (HLF) et $\mathcal{P}$ ne sont pas parallèles.

3. La droite (DG) passe par le point $D(0; 1; 0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de (DG) est donc : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

4. On résout le système d'équations :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 2x + 6y + 3z - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 6t + 6 + 3t - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 9t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \times \frac{1}{3} = 1 \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{3} \\ t = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

D'où les coordonnées $N\left(1; 1; \frac{1}{3}\right)$

5. Vérifions que la droite (GR) est orthogonale au plan (HMF) :

On a le vecteur directeur $\overrightarrow{GR}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et donc on a $\frac{x_{\overrightarrow{GR}}}{x_{\vec{n}}} = 0$ mais $\frac{y_{\overrightarrow{GR}}}{y_{\vec{n}}} = \frac{-\frac{3}{4}}{6} \neq \frac{x_{\overrightarrow{GR}}}{x_{\vec{n}}}$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{GR}$ ne sont pas colinéaire, donc la droite (GR) n'est pas orthogonale au plan (HMF)

Le point R n'est pas le projeté orthogonal de G sur (HMF) .

Corrigé sujet 1 - Exercice 3

Partie A

1. $u_1 = 6 \times 0,93 = 5,58$ la population estimée au 1^{er} janvier 2026 est de 5 580 individus

2. $u_n = u_0 \times q^n = 6 \times 0,93^n$

3. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,93^n = 0$ car $-1 < 0,93 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Au bout d'un très grand nombre d'année, la population dans le milieu A diminuera jusqu'à s'éteindre.

Partie B

1. $v_1 = -0,05v_0^2 + 1,1v_0 = -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = 4,8$

La population estimée au 1^{er} janvier 2026 est de 4 800 individus

2. $f'(x) = -0,05 \times 2x + 1,1 = -0,1x + 1,1$

et on a $-0,1x + 1,1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{-1,1}{-0,1} \Leftrightarrow x \leq 11$

La dérivée f' est positive sur $[0; 11]$, donc la fonction f est bien croissante sur $[0; 11]$

(Vous pouvez aussi faire un tableau de signe pour f' et de variation pour f)

3. On remarque que $v_{n+1} = f(v_n)$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$ avec $2 \leq 4,8 \leq 6 \leq 6$

donc on a bien $2 \leq v_1 \leq v_0 \leq 6$. : la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : Pour un p entier, on suppose que $2 \leq v_{p+1} \leq v_p \leq 6$.

Comme la fonction f est croissante, on a $f(2) \leq f(v_{p+1}) \leq f(v_p) \leq f(6)$

Avec $f(2) = 2$ et $f(6) = 4,8$ on a $2 \leq v_{p+2} \leq v_{p+1} \leq 4,8$

Et par élargissement $2 \leq v_{p+2} \leq v_{p+1} \leq 6$ La propriété est vraie pour $p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a bien : $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.

4. On a $v_{n+1} < v_n$ donc la suite est décroissante et $v_n \geq 2$: elle est donc minorée

D'après le théorème des suites monotones bornées, la suite (v_n) est donc bien convergente vers une limite ℓ

5. a. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ Alors on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \ell$ c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = \ell$

Et donc, par composé de limites $f(\ell) = \ell$

On cherche donc $-0,05\ell^2 + 1,1\ell = \ell \Leftrightarrow -0,05\ell^2 + 0,1\ell = 0 \Leftrightarrow \ell(-0,05\ell + 0,1) = 0$

Soit $\ell = 0$ ce qui est impossible, car $v_n \geq 2$ soit $-0,05\ell + 0,1 = 0 \Leftrightarrow \ell = \frac{0,1}{0,05} = 2$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$

b. Au bout d'un très grand nombre d'année, la population dans le milieu B diminuera jusqu'à se stabiliser autour de 2 000 individus.

Partie C

1. On cherche à résoudre $6 \times 0,93^n < 3 \Leftrightarrow 0,93^n < 0,5 \Leftrightarrow \ln(0,93^n) < \ln(0,5) \Leftrightarrow n \ln(0,93) < \ln(0,5)$

Comme $\ln(0,93) < 0$, on a $n > \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,93)}$ avec $\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,93)} \simeq 9,6$ on a pour n entier : $n \geq 10$

C'est 2035 que la population du milieu A serait strictement inférieure à 3 000 individus

2. À la calculatrice, on trouve $v_5 \simeq 3,1$ et $v_6 \simeq 2,96$ soit pour $n = 6$

C'est donc à partir de 2031 que la population du milieu B serait strictement inférieure à 3 000 individus.

3. Les deux suites sont décroissantes, et en comparant les termes, on trouve :

$u_{12} \simeq 2,51$ et $v_{12} \simeq 2,41$ donc $u_{12} > v_{12}$ mais $u_{13} \simeq 2,34$ et $v_{13} \simeq 2,36$ soit $u_{13} < v_{13}$

A partir de 2038, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.

Corrigé sujet 1 - Exercice 4

3. a. $f(x) = \frac{e^{x(x-1)} - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^{x(x-1-1)}}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$ CQFD

b.

x	$-\infty$	1
$(x-2)$	$-$	
e^x	$+$	
$(x-1)^2$	$+$	0
$f'(x)$	$-$	$ $
$f(x)$	$\searrow$	

4. a. Pour $x^2 - 4x + 5$, on a $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ donc son signe est celui de a , positif

x	$-\infty$	1
$x^2 - 4x + 5$	$+$	
e^x	$+$	
$(x-1)^3$	$-$	0
$f''(x)$	$-$	$ $

La fonction f est donc concave sur l'intervalle $] -\infty; 1[$

b. On a $f(0) = \frac{e^0}{-1} = -1$ et $f'(0) = \frac{-2e^0}{(-1)^2} = -2$

Donc la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = -2x - 1$$

c. La fonction f est concave donc sa courbe est en dessous de ses tangentes : on a alors

$$f(x) \leq y \Leftrightarrow \frac{e^x}{x-1} \leq -2x - 1 \quad \text{mais (attention !), pour } x \leq 1, \text{ on a } x-1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \geq (-2x-1)(x-1) \quad \text{CQFD}$$

5. a. La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

On a $f(0) = -1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}-1} \simeq -3,3$ donc $f\left(\frac{1}{2}\right) < -2 < f(0)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet bien une unique solution sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

b. On a $f(0,31) \simeq -1,96$ et $f(0,32) \simeq -2,03$ donc $0,31 < \alpha < 0,32$