

**Corrigé Exercice 8**

1)

| Equation diff.         | $y' = 4x$                                                                      | $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$                                                                                  | $y' = \frac{1}{x^2}$                                                                                                  |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ensemble des solutions | Une primitive de $4x$ est $2x^2$ donc<br>$S = \{2x^2 + k : k \in \mathbb{R}\}$ | Une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est : $2\sqrt{x}$ donc<br>$S = \{2\sqrt{x} + k : k \in \mathbb{R}\}$ | Une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est : $-\frac{1}{x}$ donc<br>$S = \left\{k - \frac{1}{x} : k \in \mathbb{R}\right\}$ |

| Equation diff.         | $y' = 4 + 6e^{-3x}$                                                                                          | $y' + 3x^2 = 0$<br>$\Leftrightarrow y' = -3x^2$                                    | $y' + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{x}$                                      |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ensemble des solutions | Une primitive de $4 + 6e^{-3x}$ est : $4x - 2e^{-3x}$ donc<br>$S = \{4x - 2e^{-3x} + k : k \in \mathbb{R}\}$ | Une primitive de $-3x^2$ est : $-x^3$ donc<br>$S = \{k - x^3 : k \in \mathbb{R}\}$ | Une primitive de $-\frac{1}{x}$ est : $-\ln x$ donc<br>$S = \{k - \ln x : k \in \mathbb{R}\}$ |

**2) Solutions particulières**

- a. Une primitive de  $3x + 2$  est  $3\frac{x^2}{2} + 2x$ . Donc il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + k$ .  
On doit avoir :  $f(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{5}{2}$ .  
On a donc :  $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{5}{2}$
- b. Une primitive de  $\frac{4}{x}$  est  $4 \ln x$ . Donc il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $g(x) = 4 \ln x + k$ .  
On doit avoir :  $g(e) = 3 \Rightarrow 4 \ln e + k = 3 \Rightarrow k = -1$ .  
On a donc :  $g(x) = 4 \ln x - 1$
- c. On a :  $y' + 8e^{2x} = 2x \Leftrightarrow y' = 2x - 8e^{2x}$ .  
Une primitive de  $2x - 8e^{2x}$  est  $x^2 - 4e^{2x}$ . Donc il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $h(x) = x^2 - 4e^{2x} + k$ .  
On doit avoir :  $h(-1) = 5 \Rightarrow 1 - 4e^{-2} + k = 5 \Rightarrow k = 4 + 4e^{-2}$ .  
On a donc :  $h(x) = x^2 - 4e^{2x} + 4 + 4e^{-2}$

**Corrigé Exercice 9**

1. On a  $v' = a = 3$  donc  $v(t) = 3t + k$ . Or  $v(0) = 7 \Rightarrow 3 \times 0 + k = 7 \Rightarrow k = 7$ .  
On a donc  $v(t) = 3t + 7$ .
2. a. La vitesse est la dérivée de la position, donc  $x' = v$ .  
L'équation différentielle est donc :  $x' = 3t + 7$ .
- b. Une primitive de  $3t + 7$  est  $\frac{3}{2}t^2 + 7t$ . Les solutions de cette équation différentielle sont donc de la forme  $x(t) = \frac{3}{2}t^2 + 7t + k'$ . Or  $x(0) = 5$  donc  $k' = 5 \Rightarrow$  On a donc  $x(t) = \frac{3}{2}t^2 + 7t + 5$ .
- c.  $x(10) = 3 \times 50 + 700 + 5 = 855$ .

## Corrigé Exercice 10

1)

|                    |                                      |                                      |                                       |
|--------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| Equation diff.     | $y' = 4y$                            | $y' = -y$                            | $y' = \frac{y}{2}$                    |
| Ens. des solutions | $S = \{Ke^{4x} : K \in \mathbb{R}\}$ | $S = \{Ke^{-x} : K \in \mathbb{R}\}$ | $S = \{Ke^{x/2} : K \in \mathbb{R}\}$ |

|                    |                                         |                                                 |
|--------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------|
| Equation diff.     | $2y' + 6y = 0 \Leftrightarrow y' = -3y$ | $y - 3y' = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3}y$ |
| Ens. des solutions | $S = \{Ke^{-3x} : K \in \mathbb{R}\}$   | $S = \{Ke^{\frac{x}{3}} : K \in \mathbb{R}\}$   |

|                    |                                                                                                    |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Equation diff.     | $(y')^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (y' - y)(y' + y) = 0 \Leftrightarrow y' = y \text{ ou } y' = -y$ |
| Ens. des solutions | Un ensemble de solution pour chacune des équadiff : $S = \{Ae^x ; Be^{-x} : A, B \in \mathbb{R}\}$ |

## 2) Solutions particulières

- a. On doit avoir :  $f(x) = Ke^{2x}$ . Or  $f(0) = 13 \Rightarrow K \times 1 = 13 \Rightarrow K = 13$ .  
On a donc  $f(x) = 13e^{2x}$ .
- b. On doit avoir :  $g(x) = Ke^{-3x}$ . Or  $g\left(\frac{1}{3}\right) = -5 \Rightarrow Ke^{-1} = -5 \Rightarrow K = -5e$ .  
On a donc  $g(x) = -5e^{1-3x}$ .
- c.  $(E) \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{4}y$ . On doit donc avoir :  $h(x) = Ke^{-x/4}$ .  
Or  $h(-8) = 7 \Rightarrow Ke^2 = 7 \Rightarrow K = 7e^{-2}$ .  
On a donc  $h(x) = 7e^{-2-x/4} = \frac{7}{e^{2+x/4}}$ .

## Corrigé Exercice 11

- 1) a. On a  $f'(x) = 0$  et  $2f(x) + 8 = -8 + 8 = 0$  donc en effet  $f' = 2f + 8$ .  
 $f$  est donc solution de l'équation (E).
- b. On a  $g(x) = Ke^{2x}$  avec  $g(1) = 3 \Rightarrow Ke^2 = 3 \Rightarrow K = 3e^{-2}$ .  
On a donc :  $g(x) = 3e^{2x-2}$ .
- c. On a :  $h(x) = f(x) + g(x) = -4 + 3e^{2x-2}$ .  
On a donc  $h'(x) = 6e^{2x-2}$  et  $2h(x) + 8 = 2(-4 + 3e^{2x-2}) + 8 = -8 + 6e^{2x-2} + 8 = 6e^{2x-2}$ .  
Ainsi on a bien  $h' = 2h + 8$  et donc  $h$  est bien solution de (E).
- 2) a. On a  $f'(x) = 1$  et  $x - f(x) = x - (x - 1) = 1$  donc en effet  $f' = x - f$ .  
 $f$  est donc solution de l'équation (E).
- b. On a  $g(x) = Ke^{-x}$  avec  $g(2) = -5 \Rightarrow Ke^{-2} = -5 \Rightarrow K = -5e^2$ .  
On a donc :  $g(x) = -5e^{2-x}$ .
- c. On a :  $h(x) = f(x) + g(x) = x - 1 - 5e^{2-x}$ .  
On a donc  $h'(x) = 1 + 5e^{2-x}$  et  $x - h(x) = x - (x - 1 - 5e^{2-x}) = 1 + 5e^{2-x}$ .  
Ainsi on a bien  $h' = x - h$  et donc  $h$  est bien solution de (E).

## Corrigé Exercice 12

1) On doit avoir :  $f'(t) - 0,002f(t) = 0,02 \Rightarrow 0 - 0,002\alpha = 0,02 \Rightarrow \alpha = -10$ .

2)  $g$  est solution de l'équation (E), donc on a :  $g'(t) - 0,002g(t) = 0,02$ .

On a donc :  $g'(t) = 0,02 + 0,002g(t)$

3) On calcule :  $h'(t) - 0,002h(t) = (g(t) + 10)' - 0,002(g(t) + 10) = g'(t) - 0,002g(t) - 0,02$   
 $= 0,02 + 0,002g(t) - 0,002g(t) - 0,02 = 0$

Donc  $h$  est bien une solution de l'équation différentielle :  $(E_0)$ .

4)  $(E_0)$  :  $y' - 0,002y = 0 \Leftrightarrow y' = 0,002y$ .

Les solutions de  $(E_0)$  sont donc les fonctions de la forme  $y(t) = Ke^{0,002t}$  où  $K \in \mathbb{R}$ .

5) Puisque  $h$  est solution de  $(E_0)$ , on a donc  $h(t) = Ke^{0,002t}$ .

Or  $h(t) = g(t) + 10$  donc  $g(t) = h(t) - 10 = Ke^{0,002t} - 10$ .

D'autre part, on sait que  $g(0) = 22$  donc  $Ke^{0,002 \times 0} - 10 = 22 \Rightarrow K = 22 + 10 = 32$ .

On a donc au final :  $g(t) = 32e^{0,002t} - 10$

6) Dans une minute, il y a 60 s. On calcule donc :  $g(60) = 32e^{0,002 \times 60} - 10 \simeq 26,1^\circ\text{C}$ .

Au bout d'une minute, la température sera montée à  $26,1^\circ\text{C}$ .

7) On résout l'inéquation :  $32e^{0,002t} - 10 > 86 \Leftrightarrow 32e^{0,002t} > 96 \Leftrightarrow e^{0,002t} > 3 \Leftrightarrow 0,002t > \ln 3$   
 $\Leftrightarrow t > 500 \ln 3$

C'est donc au bout de 549 s environ, soit 9 minutes et 9 secondes.