Corrections Savoir Ft. 2

Corrigé Exercice 3

1) $f'(x) = \mathbf{1 - \sin x}$

$g'(x) = \mathbf{2\cos x + \sin x}$

$h'(x) = \cos(x)\cos(x) + \sin(x)\,(-\sin(x))$
$\quad = \mathbf{\cos^2 x - \sin^2 x}$

$i'(x) = \mathbf{2x\sin x + x^2\cos x}$

$k(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ donc $k'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \mathbf{\frac{1}{\cos^2 x}}$

$l'(x) = 2(-\sin x)\cos^1 x = \mathbf{-2\sin x\cos x}$

2) $f(x) = \sin^2 x$ sur $[0;\pi]$ donc $f'(x) = \mathbf{2\cos x \sin x}$
avec $f(0) = f(\pi) = 0^2 = 0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = 1^2 = 1$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	|
$\sin x$		$+$	|	$+$	$\mathbf{0}$
$f'(x)$		$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$
$f(x)$	$\mathbf{0}$	↗	$\mathbf{1}$	↘	$\mathbf{0}$

$g(x) = x - \cos x$ sur $[0\,;\pi]$ donc $g'(x) = \mathbf{1 + \sin x}$
On résout $1 + \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq -1$
Ce qui est toujours vrai…
Avec $g(0) = 0 - \cos 0 = -1$,
Et $g(\pi) = \pi - \cos\pi = \pi - (-1) = \pi + 1$

x	$\mathbf{0}$		$\boldsymbol{\pi}$
$g'(x)$	0	$+$	0
$g(x)$	$\mathbf{-1}$	↗	$\boldsymbol{\pi + 1}$

3) $g'(x) = \mathbf{2\cos(2x)}$ $\qquad j'(x) = 2\cos(x+1) + 2x \times (-\sin(x+1)) = \mathbf{2\cos(x+1) - 2x\sin(x+1)}$

$$k'(x) = \frac{-4\sin(2x) \times 3\sin(2x) - 2\cos(2x) \times 6\cos(2x)}{(3\sin(2x))^2} = \frac{12(\cos^2(2x) + \sin^2(2x))}{9\sin^2(2x)} = \mathbf{\frac{4}{3\sin^2(2x)}}$$

4) $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$ sur $]-\pi;\pi[$

$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

$f'(x) = \mathbf{\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$ strictement positif

x	$-\pi$		π
$f'(x)$	||	$+$	||
$f(x)$	||	↗	||

$h(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ sur $[0;\pi]$ $\Rightarrow$ $h'(x) = -\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right)$
or $\sin\frac{x}{3} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{3} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3\pi$
Avec $h(0) = \cos 0 = 1$ et $h(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

x	0		π
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$\mathbf{1}$	↘	$\mathbf{\frac{1}{2}}$

Corrigé Exercice 4

1) $F'(x) = 0 - (-\sin x \sin x + \cos x \cos x) = +\sin^2 x - \cos^2 x = f(x) \Rightarrow F$ est bien une primitive de f.

2) a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = \left[-2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi} = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos(0) = -2 \times 0 + 2 \times 1 = \mathbf{2}$

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2 + \cos(x\pi))\, dx = \left[2x + \frac{1}{\pi}\sin(x\pi)\right]_0^1 = 2 + \frac{1}{\pi}\sin\pi - \left(2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2 + 0 - 1 - \frac{1}{\pi} \times 1$

$\displaystyle = \mathbf{1 - \frac{1}{\pi}}$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x \, dx$

Avec $u = 2x$ et $v' = \sin x$

$u' = 2$ et $v = -\cos x$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin x \, dx = [-2x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\cos x \, dx$

$\displaystyle = -\frac{2\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0 + 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi + 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)$

$= \boldsymbol{-\pi + 2}$

Corrigé Exercice 5

1 a) En traçant les deux fonctions $x \to \cos x$ et $x \to x$ il semble n'y avoir **qu'une seule intersection.**

b) On a $\cos x \in [-1; 1]$ donc si l'équation $\cos x = x$ admet une solution, **elle appartient à $[-1; 1]$**

c) Étudier le sens de variation de la fonction h sur $[-1; 1]$ par $h(x) = x - \cos x$

$h'(x) = 1 + \sin x$ et $1 + \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq -1$ ce qui est toujours vrai.

Donc la dérivée h' est toujours positive, et la fonction $\boldsymbol{h}$ **est strictement croissante sur $[-1; 1]$**

d) $\cos x = x \Leftrightarrow x - \cos x = 0$

On a $h(-1) = -1 - \cos(-1) \simeq -1{,}5$ et $h(1) = 1 - \cos(1) \simeq 0{,}5$

La fonction h est continue et strictement croissante sur $[-1; 1]$, avec $0 \in [h(-1); h(1)]$.

Donc, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α

L'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α

e) On trouve $\boldsymbol{\alpha \simeq 0{,}739}$

2) a) $f'(x) = 2 + 2\cos 2x = 2(1 + \cos 2x)$ CQFD

b) $1 + \cos 2x \geq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \geq -1$ ce qui est toujours vrai. La dérivée f' est toujours positive, donc la fonction $\boldsymbol{f}$ **est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$**

x	$-\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\boldsymbol{-\pi}$ ↗ $\boldsymbol{\pi}$

c) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\pi + \sin(-\pi) = -\pi$ et par symétrie $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)\, dx = \left[\frac{1}{2}(2x + \sin 2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1}{2}\left(2 \times \frac{\pi}{2} + \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right)\right)\right) - \left(\frac{1}{2}(0 + \sin 0)\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi} + \sin\boldsymbol{\pi}) - \frac{1}{2} \times 0 = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$