

Corrigé 5.

1. $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $G(1; 1; 1)$, $I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ et $J\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

2. a. La droite (AJ) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AJ}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$ et comme elle passe par le point $A(0; 0; 0)$ elle a comme

représentation paramétrique ; $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

b. La droite dont la représentation paramétrique est $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, passe, pour $t = 0$ par le point de

coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ qui est le point I , ainsi que, pour $t = 1$, par le point de coordonnées $(1; 1; 1)$ qui est le point G : **il s'agit bien de la droite (IG)**

Rem : Vous pouvez aussi déterminer la représentation paramétrique de (IG) et constater que c'est la même.

c. On résout le système d'équation :

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t' \\ \frac{1}{2}t = t' \\ \frac{1}{2}t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}t \\ t' = \frac{1}{2}t \\ t' = \frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - \frac{1}{4}t = \frac{1}{2} \\ t' = \frac{1}{2}t \\ t' = \frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}t = \frac{1}{2} \\ t' = \frac{1}{2}t \\ t' = \frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ t' = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ t' = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Le système a bien une solution : les 2 droites sont sécantes

On a, comme $t = \frac{2}{3}$: $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$ **Les coordonnées du point d'intersection S sont bien $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$**

Rem : Vous pouvez aussi : (1) vérifier que le point S appartient aux 2 droites en remplaçant x, y et z par $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$

Mais il faut aussi vérifier alors que les droites ne sont pas confondues, donc que les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires... C'est au bout du compte plus long...

3. a. Le plan (ABG) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\overrightarrow{AG}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On a $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 1 - 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \times 1 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABG) : **il est donc normal au plan (ABG)**

b. Le plan (ABG) a une équation cartésienne du type $0x - y + z + d = 0$

Comme $A \in (ABG)$, on a $-y_A + z_A + d = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

Donc une équation cartésienne du plan (ABG) est : **$-y + z = 0$**

c. On résout le système d'équations :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -t \\ z = 1 + t \\ -y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -t \\ z = 1 + t \\ -(-t) + 1 + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -t \\ z = 1 + t \\ 2t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ z = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

La droite (d) coupe bien le plan (ABG) au point $L\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

d. On a $LA = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

puis $LB = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Et enfin $LG = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Le point L est bien équidistant des points A, B et G .

4. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont orthogonaux, le triangle ABG est bien rectangle en B .

5. a. Le **centre du cercle circonscrit** au triangle ABG est le **point L**

(car le cercle circonscrit passe par les 3 sommets du triangle et son centre est à équidistance des 3 sommets, et on avait $LA = LB = LG$)

Le **centre de gravité** du triangle ABG est le **point S**

(car les droites (IG) et (AJ) sont 2 des médianes du triangle ABG)

L'orthocentre du triangle ABG est le **point B**

(car dans un triangle rectangle, les 2 côtés de l'angle droit sont donc aussi des hauteurs, et leur intersection est donc le sommet de l'angle droit)

b. On a $\overrightarrow{BL} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ on peut donc vérifier que : $\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BL}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BS}$ sont colinéaires, donc les points B, L et S sont alignés

Corrigé 6.

1. a. On a $I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ et $J\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$.

On a $x_N = \frac{x_I + x_J}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}$; $y_N = \frac{1}{2}$ et $z_N = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ donc $N\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

b. $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \\ \frac{1}{2} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et avec $F(1; 0; 1)$ on a $\overrightarrow{NF} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{4} \\ 0 - \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ CQFD

c. $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{NF} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} - \frac{1}{2} = 0$ Ils sont bien orthogonaux.

d. La droite (NF) est perpendiculaire à la droite (IJ) et N appartient à $[IJ]$: donc la droite (NF) est la hauteur issue de F .

On a donc $\mathcal{A}_{FIJ} = \frac{\text{hauteur} \times \text{base}}{2} = \frac{NF \times IJ}{2}$ avec $NF = \frac{\sqrt{14}}{4}$ et $IJ = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}}$

$\mathcal{A}_{FIJ} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{14}}{4} \times \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{14 \times 6}{4}} = \frac{1}{8} \sqrt{21}$ CQFD

2. a. Le plan (FIJ) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{FI} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On a $\vec{u} \cdot \overrightarrow{FI} = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \times 0 - 2 \times (-1) = -2 + 2 = 0$

et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{IJ} = 4 \times \frac{1}{2} - 1 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 2 - 1 - 1 = 0$

Donc $\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan, il est bien normal au plan (FIJ)

b. Une équation cartésienne du plan (FIJ) est du type $4x - y - 2z + d = 0$

Comme $F \in (FIJ)$, on a : $4x_F - y_F - 2z_F + d = 0 \Leftrightarrow 4 \times 1 - 0 - 2 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$

Une équation cartésienne du plan (FIJ) est bien : **$4x - y - 2z - 2 = 0$** .

c. La droite d a donc pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et passe par le point $H(0; 1; 1)$

Elle a donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

d. On veut déterminer le projeté orthogonal de H sur (FIJ) c'est-à-dire l'intersection de d et de (FIJ)

On résout le système d'équations $\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \\ 4x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \\ 4 \times 4t - (1 - t) - 2(1 - 2t) - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \\ 16t - 1 + t - 2 + 4t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \\ 21t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \times \frac{5}{21} = \frac{20}{21} \\ y = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21} \\ z = 1 - \frac{10}{21} = \frac{11}{21} \\ t = \frac{5}{21} \end{cases}$

donc le projeté orthogonal de H sur le plan (FIJ) est le point $K \left(\frac{20}{21}; \frac{16}{21}; \frac{11}{21} \right)$

Donc la distance de H au plan (FIJ) est :

$$HK = \sqrt{\left(-\frac{20}{21}\right)^2 + \left(1 - \frac{16}{21}\right)^2 + \left(1 - \frac{11}{21}\right)^2} = \sqrt{\frac{400}{21^2} + \frac{25}{21^2} + \frac{100}{21^2}} = \frac{\sqrt{525}}{21} = \frac{5\sqrt{21}}{21}$$

e. $\mathcal{V}_{HFIJ} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{FIJ} \times HK = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{8} \times \frac{5}{\sqrt{21}} = \frac{5}{24}$

Corrigé 7.

Partie I

1. On trouve : $P(6; 0; 0)$ et $Q(0; 0; 6)$.
2. $\overrightarrow{PQ}(-6; 0; 6)$ et $\overrightarrow{PR}(2; 2; 8)$ sont deux vecteurs non colinéaires de (PQR) .
On a de plus : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = -6 + 0 + 6 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 2 - 10 + 8 = 0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à ces deux vecteurs. $\vec{n}$ est donc un vecteur normal au plan (PQR) .
3. Une équation cartésienne de (PQR) est donc de la forme $x - 5y + z + d = 0$.
Or $P \in (PQR) \Rightarrow d = -x_P + 5y_P - z_P = -6$.
On a donc bien $(PQR) : x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

1. Ω est le milieu des diagonales du cube, et notamment : $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(8; 8; 8) = (4; 4; 4)$ donc en effet on a : $\Omega(4; 4; 4)$.
2. d perpendiculaire au plan (PQR) dont un vecteur normal est $\vec{n}$ donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de d .
On trouve donc : $d : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 4 - 5t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
3. L est le point d'intersection de d avec le plan (PQR) . On résout :
$$\begin{cases} x_L = 4 + t \\ y_L = 4 - 5t \\ z_L = 4 + t \\ x_L - 5y_L + z_L - 6 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_L = 4 + t \\ y_L = 4 - 5t \\ z_L = 4 + t \\ 4 + t - 5(4 - 5t) + 4 + t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = 4 + t \\ y_L = 4 - 5t \\ z_L = 4 + t \\ 27t - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \\ y_L = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3} \\ z_L = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \\ t = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \\ y_L = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3} \\ z_L = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \end{cases}$$

On a donc bien $L\left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$.

4. De la question précédente, on déduit que L est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (PQR)

La distance du point Ω au plan (PQR) est donc égale à :

$$\Omega L = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{100}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{108}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$