Savoir Pb.6 : Loi binomiale - Espérance et écart-type

Entraînement n° 1

1) La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(25\,;0{,}35)$. Déterminer les valeurs exactes, puis les valeurs approchées au dixième, de l'espérance $E(X)$ et de l'écart-type $\sigma(X)$

2) Selon une étude épidémiologique sur une maladie infectieuse au cours d'une épidémie, 16 % de la population a été infectée par le virus. On choisit au hasard un échantillon de 150 personnes. On appelle M la variable aléatoire qui compte le nombre de personne qui ont été malade au cours de l'épidémie. M suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0{,}16$

a. Déterminer l'espérance de M et interpréter le résultat dans le contexte.

b. On donne $\sigma(M) \simeq 4{,}5$. Déterminer $p(19 \leq M \leq 29)$ à 0,1 % près. Interpréter dans le contexte.

Entraînement n° 2

1) La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0{,}6$. Déterminer les valeurs exactes, puis les valeurs approchées au dixième, de l'espérance et de l'écart-type de la variable Y

2) À un jeu de hasard, on a pour chaque partie 1 chances sur 4 de gagner. Un joueur joue 50 parties d'affilées. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre des parties perdues. X suit une loi binomiale.

a. Déterminer les paramètres de la loi de probabilité de X ?

b. Calculer l'espérance E et interpréter le résultat dans le contexte.

c. Calculer l'écart-type σ.

d. Déterminer $p(34 \leq X \leq 41)$ et interpréter le résultat dans le contexte.

Entraînement n° 3

1) La variable aléatoire W suit une loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;0{,}9)$ et la variable Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;0{,}55)$. Comparer pour ces deux variables leur espérance E et leur écart-type σ.

2) Dans une population, on estime que 24 % des personnes sont en surpoids. On regarde un échantillon de 800 personnes choisies au hasard. On appelle S la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes en surpoids..

a. Quelle loi de probabilité suit la variable S ?

b. Déterminer le nombre moyen de personnes en surpoids qu'on peut espérer dans cet échantillon.

c. Déterminer x tel que $p(192 - x \leq S \leq 192 + x) \simeq 0{,}7$. Interpréter dans le contexte.

Corrections Savoir Pb.6

Corrigé Entraînement n° 1

1) $E(X) = np = 25 \times 0{,}35 = \mathbf{8{,}75}$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{25 \times 0{,}35 \times 0{,}65} = \sqrt{\mathbf{5{,}6875}} \simeq \mathbf{2{,}4}$

2) a. $E(M) = np = 150 \times 0{,}16 = \mathbf{24}$
On peut « espérer » en moyenne 24 personnes infectées dans l'échantillon

b. $p(19 \leq M \leq 29) = p(M \leq 29) - p(M \leq 18) \simeq 0{,}780$
Il y a environ 78 % de chances d'avoir entre 19 et 29 personnes infectées dans l'échantillon.

Corrigé Entraînement n° 2

1) $E(Y) = np = 60 \times 0{,}6 = \mathbf{36}$ et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{36 \times 0{,}4} = \sqrt{\mathbf{14{,}4}} \simeq \mathbf{3{,}8}$

2) a. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}75$ (attention, parties PERDUES)

b. $E(X) = np = 50 \times 0{,}75 = \mathbf{37{,}5}$
Ce joueur peut « espérer » perdre entre 37 et 38 parties

c. $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{37{,}5 \times 0{,}25} = \sqrt{\mathbf{9{,}375}} \simeq \mathbf{3{,}06}$

d. $p(34 \leq X \leq 41) = p(X \leq 41) - p(X \leq 33) \simeq 0{,}81$
Il y a 81 % de chances qu'il perde entre 34 et 41 parties

Corrigé Entraînement n° 3

1) $E(W) = np = 20 \times 0{,}9 = \mathbf{18}$ et $\sigma(W) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{18 \times 0{,}1} = \sqrt{\mathbf{1{,}8}} \simeq \mathbf{1{,}3}$
$E(Z) = 20 \times 0{,}55 = \mathbf{11}$ et $\sigma(Z) = \sqrt{11 \times 0{,}45} = \sqrt{\mathbf{4{,}95}} \simeq \mathbf{2{,}2}$
La variable Z a une espérance plus faible, mais un écart-type plus important, donc une dispersion plus importante que la variable W

2) a. Il s'agit d'une répétition de 800 tirages identiques dont la probabilité de succès est de 0,24. La variable S suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 800$ et $p = 0{,}24$

b. $E(S) = np = 800 \times 0{,}24 = \mathbf{192}$
On peut « espérer » 192 personnes en surpoids dans cet échantillon.

c. $p(192 - x \leq S \leq 192 + x) \simeq 0{,}68 \quad \Leftrightarrow \quad p(S \leq 192 + x) - p(S \leq 192 - x - 1) \simeq 0{,}68$

Piste : on essaye avec l'écart-type (parce que c'est souvent le cas), sinon on cherche à la calculatrice avec comme fonction $p(S \leq 192 + x) - p(S \leq 191 - x)$
L'écart-type est $\sigma(S) = \sqrt{192 \times 0{,}76} \simeq 12$

Et $p(192 - 12 \leq S \leq 192 + 12) = p(S \leq 192 + 12) - p(S \leq 191 - 12)$
$= p(S \leq 204) - p(S \leq 179) \simeq 0{,}699$

On a donc $\boldsymbol{x = 12}$