

Sujet n°4 : Corrections

Corrigé sujet 4 - Exercice 1

Partie A

$$f(x) = \frac{0,96x}{0,93x + 0,03}$$

$$1. f'(x) = \frac{0,96(0,93x+0,03) - 0,96x \times 0,93}{(0,93x + 0,03)^2} = \frac{0,8928x + 0,0288 - 0,8928x}{(0,93x + 0,03)^2} = \frac{0,0288}{(0,93x + 0,03)^2} \quad \text{CQFD}$$

2. pour tout $x \in [0; 1]$, on a alors $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; 1]$

Partie B

1. $\Rightarrow$

$$2. p(D \cap T) = p(D) \times p_D(T) = 0,96x$$

$$3. p(T) = p(D \cap T) + p(\bar{D} \cap T) = 0,96x + (1-x) \times 0,03 \\ = 0,96x - 0,03x + 0,03 = 0,93x + 0,03 \quad \text{CQFD}$$

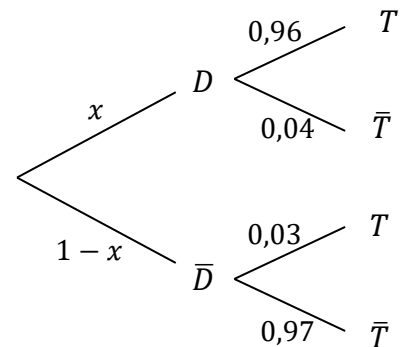
$$4. \text{ On a } p_T(D) = \frac{p(D \cap T)}{p(T)} = \frac{0,96x}{0,93x + 0,03} = f(x)$$

donc, en prenant $x = \frac{50}{1000} = 0,05$, on a bien $p_T(D) = f(0,05) \simeq 0,63$

$$5. \text{ a. On cherche } x \text{ tel que } p_T(D) \geq 0,9 \Leftrightarrow f(x) \geq 0,9 \Leftrightarrow \frac{0,96x}{0,93x + 0,03} \geq 0,9 \Leftrightarrow 0,96x \geq 0,9(0,93x + 0,03) \\ \Leftrightarrow 0,96x \geq 0,837x + 0,027 \Leftrightarrow 0,123x \geq 0,027 \Leftrightarrow x \geq \frac{0,027}{0,123} \Rightarrow x \geq 0,22$$

Il faudrait qu'il y ait 22% de dopés pour que la valeur prédictive positive dépasse les 90 %

b. Si on teste une population où la proportion des dopés augmente, donc où x augmente, alors la valeur prédictive positive, égale à $f(x)$, augmentera aussi, puisque la fonction f est croissante.



Corrigé sujet 4 - Exercice 2

1. S est l'intersection de d_B avec $P_0: z = 0$. On résout donc : $11 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{11}{4}$.

$$S \text{ a donc pour coordonnées : } \begin{cases} x = -11 + 5 \times \frac{11}{4} = \frac{11}{4} \\ y = -5 + \frac{11}{4} = -\frac{9}{4} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow S\left(\frac{11}{4}; -\frac{9}{4}; 0\right)$$

$$2. \text{ a. } d_A: \begin{cases} x = -7 + 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = 7 - 3t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

b. Pour savoir si d_A et d_B sont sécantes ou pas, on résout :

$$\begin{cases} -11 + 5t = -7 + 2t' \\ -5 + t = 1 - t' \\ 11 - 4t = 7 - 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -11 + 30 - t' = -7 + 2t' \\ t = 6 - t' \\ 11 - 24 + 4t' = 7 - 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26 = 3t' \\ t = 6 - t' \\ 7t' = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{26}{3} \\ t = 6 - t' \\ t' = \frac{20}{7} \end{cases}$$

Le système est incompatible donc les droites ne sont pas sécantes : les avions ne peuvent pas entrer en collision.

$$3. a. E \in d_A \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -7 + 2t' \\ -1 = 1 - t' \\ 1 = 7 - 3t' \end{cases} \Leftrightarrow t' = 2$$

Le système a une solution, donc effectivement l'avion Alpha passe par E .

$$b. P_E \perp d_A \text{ donc le vecteur directeur } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal de } P_E.$$

Son équation est donc de la forme : $2x - y - 3z + d = 0$.

$$\text{Or } E \in P_E \Rightarrow -6 + 1 - 3 + d = 0 \Rightarrow d = 8$$

$$\text{On a donc bien : } P_E: 2x - y - 3z + 8 = 0.$$

c. Le point d'intersection de P_E et de d_B se trouve en résolvant :

$$2(-11 + 5t) - (-5 + t) - 3(11 - 4t) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow -42 + 17t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{42}{17} = 2$$

$$\text{Donc les coordonnées du point d'intersection sont : } \begin{cases} x = -11 + 10 = -1 \\ y = -5 + 2 = -3 \\ z = 11 - 8 = 3 \end{cases} \quad \text{Il s'agit effectivement de } F.$$

$$d. \text{ On a } \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow EF = \sqrt{3 \times 4} = 2\sqrt{3} \simeq 3,464 \text{ km. Il s'agit donc bien d'une distance de } 3\,464 \text{ m.}$$

4. Les avions doivent être à plus de $3 \times 1852 = 5556 \text{ m} > 3\,464 \text{ m}$ donc non, la distance de sécurité ne sera pas respectée.

Corrigé sujet 4 - Exercice 3

$$\text{Partie A : } 1. a. u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n + 2 - 2 = u_n^2 - 2u_n = u_n(u_n - 2) \quad \text{CQFD}$$

$$b. \text{ D'une part on a } u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2$$

$$\text{D'autre part : } (u_n - 1)(u_n - 2) = u_n^2 - 2u_n - u_n + 2 = u_n^2 - 3u_n + 2$$

$$\text{On a bien : } u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$$

2. a. On remarque que démontrer que $u_n < 2$ revient à démontrer que $u_n - 2 < 0$

Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ or dans cette question, on a $a < 2$ l'inégalité est vraie pour $n = 0$

Hérédité : On suppose que pour $p \in \mathbb{N}$, on a $u_p - 2 < 0$

$$\text{Alors } u_{p+1} - 2 = u_p(u_p - 2)$$

On a admis que $u_p > 1$ donc est $u_p > 0$ et, par hypothèse de récurrence, on a $u_p - 2 < 0$

Donc, par produit, on en conclut que $u_{p+1} - 2 < 0$

Conclusion : pour tout entier naturel n , on a bien $u_n - 2 < 0 \Leftrightarrow u_n < 2$

b. On a $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$

On sait que $u_n > 1 \Leftrightarrow u_n - 1 > 0$ et on vient de montrer que $u_n - 2 < 0$

Donc par produit, on en conclut que $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est décroissante.

Comme (u_n) est aussi minorée par 1 (admis) : donc d'après le théorème des suites monotones bornée, elle est convergente.

On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ on a alors aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ et par suite : $\ell^2 - 2\ell + 2 = \ell \Leftrightarrow \ell^2 - 3\ell + 2 = 0$

On a $\Delta = 9 - 8 = 1$ avec $\ell_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ et $\ell_2 = \frac{3-1}{2} = 1$

Comme la suite est décroissante, elle est majorée par son 1^{er} terme $u_0 = a < 2$ donc la seule solution possible est $\ell_2 = 1$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Partie B

1. u(2,1) pour $a = 2$ et $n = 1$ le programme renvoie $u_1 = 2$

u(2,1) pour $a = 2$ et $n = 2$ le programme renvoie $u_2 = 2$

2. Dans le cas où $a = 2$ la suite (u_n) a l'air d'être stationnaire et de termes tous égaux à 2

Partie C 1. a. On veut montrer que $v_{n+1} = 2v_n$

D'une part : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1) = \ln(u_n^2 - 2u_n + 1)$

D'autre part : $2v_n = 2 \ln(u_n - 1) = \ln((u_n - 1)^2) = \ln(u_n^2 - 2u_n + 1)$

On a bien : $v_{n+1} = 2v_n$: la suite (v_n) est bien géométrique de raison 2

Le premier terme est $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(a - 1)$

b. On a alors $v_n = v_0 \times q^n = \ln(a - 1) \times 2^n$

et comme $v_n = \ln(u_n - 1)$ on a $e^{v_n} = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n = e^{v_n} + 1 = e^{\ln(a-1) \times 2^n} + 1$ CQFD

2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$ Donc la limite de $\ln(a - 1) \times 2^n$ dépend du signe de $\ln(a - 1)$

On a $\ln(a - 1) \geq 0 \Leftrightarrow a - 1 \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 2$

1^{er} cas : si $1 < a < 2$ alors $\ln(a - 1) < 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a - 1) \times 2^n = -\infty$

Comme on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ par composée, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(a-1) \times 2^n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

2^{ème} cas : si $a = 2$ alors on a admis que la suite était stationnaire et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

3^{ème} cas : si $a > 2$ alors $\ln(a - 1) > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a - 1) \times 2^n = +\infty$

Comme on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$ par composée, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(a-1) \times 2^n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Corrigé sujet 4 - Exercice 4

Partie A

1. $f(-1) = -2$ et $f'(-1) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1}{1} = 1$

2. La courbe n'est pas entièrement au-dessus de la tangente T donc elle ne peut pas être convexe sur tout son ensemble de définition.

3. L'équation $f(x) = 0$ semble n'avoir qu'une seule solution $\alpha \simeq 0,1$.

Partie B

2. $f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+2} = \frac{2x^2 + 4x + 2x + 4 + 1}{x+2} = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}$ CQFD

3. Pour $2x^2 + 6x + 5$, on a $\Delta = 36 - 40 = -4$ donc $2x^2 + 6x + 5$ est positif. $x + 2$ est aussi positif sur $] -2; +\infty[$, donc la dérivée est positive. On obtient donc :

x	-2	$+\infty$
$f(x)$		↗

4. On calcule $f(-1) = -2$ et $f(1) = 2 + \ln(3)$.

f est continue et strictement croissante sur $[-1; 1]$ avec $f(-1) < 0 < f(1)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -2; +\infty[$ (et on sait même que $\alpha \in]-1; 1[$).

On observe que : $f(0,117) < 0 < f(0,118)$ donc $\alpha \simeq 0,12$.

5. On obtient donc :

x	-2	α	$+\infty$	
$f(x)$	$ $	$-$	0	$+$

6. On calcule :

$$f''(x) = \frac{(4x+6)(x+2) - (2x^2+6x+5)(1)}{(x+2)^2} = \frac{4x^2+14x+12-2x^2-6x-5}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$$

Pour $2x^2+8x+7$, on a $\Delta = 64 - 56 = 8$ avec deux racines : $x_1 = \frac{-8+\sqrt{8}}{4}$ et $x_2 = \frac{-8-\sqrt{8}}{4}$.

Mais $x_2 \notin]-2; +\infty[$. Donc on obtient :

x	-2	x_1	$+\infty$	
$f''(x)$	$ $	$+$	0	$-$

Il y a donc un unique point d'inflexion en $x = \frac{-8+\sqrt{8}}{4} \left(= \frac{\sqrt{2}-4}{2} \right)$

Partie C

1. On a $x_M = x$ et $y_M = g(x) = \ln(x+2)$ et $J(0;1)$ donc $\overrightarrow{JM} \left(\ln(x+2) - 1 \right)$.

On a donc $JM = \sqrt{x^2 + (\ln(x+2) - 1)^2}$ et $JM^2 = x^2 + (\ln(x+2) - 1)^2$

Donc $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$ CQFD

2. a. D'après les résultats de la partie B, on a :

x	-2	α	$+\infty$	
$2f(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$
$x+2$	0	$+$	$ $	$+$
$h'(x)$	$\parallel$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\parallel$	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$

b. JM est minimale est α là où JM^2 est minimale. Vu que $h(x) = JM^2$, c'est donc en $x = \alpha$ en effet.

3. a. α est une solution de $f(x) = 0$ donc $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha+2) = 0$
 $\Rightarrow \ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$ CQFD.

b. Le coefficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé. On a donc $m_1 = g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2}$.

Le coefficient directeur de (JM_α) est : $m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(\alpha+2)-1}{\alpha}$.

On a donc : $m_2 = \frac{1-2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha} = -2 - \alpha = -(\alpha+2)$.

Ainsi : $m_1 m_2 = \frac{1}{\alpha+2} \times (-(\alpha+2)) = -1$

Donc la tangente est perpendiculaire à (JM_α) .