

II - Suites géométriques

Savoir S.3

1) Définition et relation de récurrence

Def. On dit qu'une suite est **géométrique** si, pour passer d'un terme au suivant, **on multiplie toujours par le même nombre**. Ce nombre s'appelle la **raison**, et on le note en général **q**

Relation de récurrence

(u_n) est une suite géométrique de raison q : **$u_{n+1} = q \times u_n$**

Remarque : On a aussi $u_n = q \times u_{n-1}$

2) Formule explicite

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q

$$1^{\text{er}} \text{ terme } u_0 \quad \Rightarrow \quad u_n = u_0 \times q^n$$

$$1^{\text{er}} \text{ terme } u_1 \quad \Rightarrow \quad u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

$$1^{\text{er}} \text{ terme } u_p \quad \Rightarrow \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemples : à partir de la feuille d'exemples

♦ (u_n) suite géométrique de raison 2 et de 1^{er} terme $u_0 = -6$

Relation de récurrence : $u_{n+1} = 2u_n$ Formule explicite : $u_n = -6 \times 2^n$

♦ (C_n) suite géométrique de raison $-0,4$ et de 1^{er} terme $C_2 = 1\,500$

Relation de récurrence : $C_n = -0,4C_{n-1}$ Formule explicite : $C_n = 1\,500 \times (-0,4)^{n-2}$

3) Calculs de termes

Méthode : Pour les 1^{er} termes, on utilise la relation de récurrence. Pour les termes de rang plus élevés, on utilise l'explicite.

Exemples : à partir de la feuille d'exemples

♦ (u_n) Relation de récurrence : $u_{n+1} = 2u_n$ Formule explicite : $u_n = -6 \times 2^n$

$$u_1 = 2 \times u_0 = 2 \times (-6) = -12 \quad \text{et} \quad u_2 = 2 \times u_1 = 2 \times (-12) = -24$$

$$u_8 = -6 \times 2^8 = -1\,536 \quad \text{et} \quad u_{20} = -6 \times 2^{20} = -6\,291\,456$$

♦ (C_n) Relation de récurrence : $C_n = -0,4C_{n-1}$ Formule explicite : $C_n = 1\,500 \times (-0,4)^{n-2}$

$$C_3 = -0,4C_2 = -0,4 \times 1\,500 = -600 \quad \text{et} \quad C_4 = -0,4C_3 = -0,4 \times 600 = -240$$

Quand la raison est négative, les termes alternent de signes.

Exemples de suites arithmétiques

Suites	Relation de récurrence	Premiers termes	Formule explicite	Autres termes
(u_n) suite géométrique de raison 2 et de 1 ^{er} terme $u_0 = -6$	$u_{n+1} = 2u_n$	$u_0 = -6$ $u_1 = 2 \times u_0 = 2 \times (-6) = -12$ $u_2 = 2 \times u_1 = 2 \times (-12) = -24$	$u_n = -6 \times 2^n$	$u_8 = -6 \times 2^8 = -1\,536$
(w_n) suite géométrique de raison -3 et de 1 ^{er} terme $w_0 = 100$	$w_{n+1} = -3w_n$	$w_0 = 100$ $w_1 = -3 \times w_0 = -3 \times 100 = -300$ $w_2 = -3 \times (-300) = +900$	$w_n = 100 \times (-3)^n$	$w_7 = 100 \times (-3)^7 = -218\,700$
(a_n) suite géométrique de raison 1,25 et de 1 ^{er} terme $a_0 = 2$	$a_n = 1,25a_{n-1}$	$a_0 = 2$ $a_1 = 1,25a_0 = 1,25 \times 2 = 3$ $a_2 = 1,25 \times 3 = 3,75$	$a_n = 2 \times 1,25^n$	$a_{10} = 2 \times 1,25^{10} \simeq 18,62$
(b_n) suite géométrique de raison 10 et de 1 ^{er} terme $b_1 = 0,003$	$b_{n+1} = 10b_n$	$b_1 = 0,003$ $b_2 = 10b_1 = 10 \times 0,003 = 0,03$ $b_3 = 10 \times 0,03 = 0,3$	$b_n = 0,003 \times 10^{n-1}$	$b_9 = 0,003 \times 10^{9-1} = 0,003 \times 10^8 = 300\,000$
(C_n) suite géométrique de raison $-0,4$ et de 1 ^{er} terme $C_2 = 1\,500$	$C_n = -0,4C_{n-1}$	$C_2 = 1\,500$ $C_3 = -0,4 \times C_2 = -0,4 \times 1\,500 = -600$ $C_4 = -0,4 \times (-600) = 240$	$C_n = 1\,500 \times (-0,4)^{n-2}$	$C_6 = 1\,500 \times (-0,4)^4 = 38,4$
(E_n) suite géométrique de raison 1,02 et de 1 ^{er} terme $E_3 = 5\,000$	$E_{n+1} = 1,02E_n$	$E_3 = 5\,000$ $E_4 = 1,02 \times E_3 = 1,02 \times 5\,000 = 5\,100$	$E_n = 5\,000 \times 1,02^{n-3}$	$E_{20} = 5\,000 \times 1,02^{17} \simeq 7\,001,2$
(φ_n) suite géométrique de raison e et de 1 ^{er} terme $\varphi_1 = 1$	$\varphi_{n+1} = e\varphi_n$	$\varphi_1 = 1$ $\varphi_2 = e \times \varphi_1 = e$	$\varphi_n = e^{n-1}$	$\varphi_{11} = e^{10} \simeq 22\,026,5$