

Corrigé Exercice 4

1) a. $u_1 = 13, u_2 = 73$ et $u_3 = 373$
 puis $v_0 = 3, v_1 = 15, v_2 = 75$ et $v_3 = 375$

b. $v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = (5u_n + 8) + 2$
 $= 5(v_n - 2) + 10 = 5v_n + 10 - 10$
 $= 5v_n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 3$

c. $v_n = 3 \times 5^n$

d. $u_n = v_n - 2$ donc $u_n = 3 \times 5^n - 2$

2) a. on a $u_n = v_n + 25$
 Et $v_{n+1} = u_{n+1} - 25 = (1,6u_n - 15) - 25$
 $= 1,6(v_n + 25) - 40 = 1,6v_n + 40 - 40$
 $= 1,6v_n$

la suite (v_n) est géométrique, de raison 1,6 et de premier terme
 $v_0 = u_0 - 25 = 800 - 25 = 775$

b. on a alors : $v_n = 775 \times 1,6^n$, et par conséquent
 $u_n = v_n + 25$ donc $u_n = 775 \times 1,6^n + 25$.

3) a. $u_0 = 6$; $u_1 = \frac{1}{2} \times 6 + 1 = 4$ et $u_2 = 3$ et $v_0 = 6 - 2 = 4$; $v_1 = 2$ et $v_2 = 1$

b. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}(v_n + 2) - 1 = \frac{1}{2}v_n + 1 - 1 = \frac{1}{2}v_n$
 La suite v est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 4$

c. $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ d. $u_n = v_n + 2 = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

Corrigé Exercice 5

1) a. $u_0 = -1$; $u_1 = \frac{-1}{-2+1} = 1$; $u_2 = \frac{1}{3}$ et $v_0 = -1$; $v_1 = 1$ et $v_2 = 3$

b. $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2u_n+1}{u_n} = \frac{2\left(\frac{1}{v_n}\right)+1}{\frac{1}{v_n}} = \frac{2+v_n}{\frac{1}{v_n}} = 2 + v_n$

La suite v est arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -1$

c. $v_n = v_0 + nR = -1 + 2n$ d. $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2n-1}$

2) a. $b_{n+1} = a_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}a_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(a_n - n) = \frac{2}{3}b_n$
 (b_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $b_1 = a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$

b. $a_n = b_n + n = b_1 \times q^{n-1} + n = 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + n$

Un peu plus...

4) a. $u_1 = 0,9 \times 110 + 3 = 129$
 $\Rightarrow$ **129 exposants sont attendus pour 2013**

b. Si chaque année 90% des exposants se réinscrivent, cela revient à multiplier le nombre d'inscrits de l'année précédente par 0,9 (soit $0,9u_n$). Comme de plus on ajoute 30 nouveaux inscrits chaque année, on a bien : $u_{n+1} = 0,9u_n + 30$.

c. $v_n = u_n - 300$ donc $u_n = v_n + 300$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 300$
 $= (0,9u_n + 30) - 300$
 $= 0,9(v_n + 300) - 270$
 $= 0,9v_n + 270 - 270$
 $= 0,9v_n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9.

Son premier terme est :
 $v_0 = u_0 - 300 = -190$

d. On a $v_n = v_0 \times q^n = -190 \times 0,9^n$
 Et $u_n = v_n + 300$
 $u_n = -190 \times 0,9^n + 300$

3) a. $u_1 = \frac{u_0+v_0}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$; $v_1 = \frac{u_1+v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2}+4}{2} = \frac{15}{4}$; $u_2 = \frac{29}{8}$ et $v_2 = \frac{59}{16}$

b. $a_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{u_{n+1}-u_n}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n+v_n}{2} - u_n \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{v_n-u_n}{2} \right) = \frac{1}{4} (v_n - u_n) = \frac{1}{4} a_n$

(a_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de 1^{er} terme $a_0 = v_0 - u_0 = 1$ $b_0 = \frac{u_0+2v_0}{3} = \frac{11}{3}$

$b_{n+1} = \frac{1}{3} (u_{n+1} + 2v_{n+1}) = \frac{1}{3} \left(\frac{u_n+v_n}{2} + 2 \times \frac{u_{n+1}+v_n}{2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{u_n+v_n}{2} + \frac{u_n+v_n}{2} + v_n \right) = \frac{1}{3} (u_n + 2v_n) = b_n$

(b_n) est bien une suite stationnaire égale à son premier terme $b_0 = \frac{u_0+2v_0}{3} = \frac{11}{3}$

c. $a_n = a_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$ et $b_n = \frac{11}{3}$

d. On cherche à résoudre le système $\begin{cases} a_n = v_n - u_n \\ b_n = \frac{u_n+2v_n}{3} \end{cases}$ pour trouver u_n et v_n en fonction de a_n et de b_n

$$\begin{cases} \frac{1}{4^n} = v_n - u_n \\ \frac{11}{3} = \frac{u_n+2v_n}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = v_n - \frac{1}{4^n} \\ 11 = \left(v_n - \frac{1}{4^n}\right) + 2v_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = v_n - \frac{1}{4^n} \\ 3v_n = 11 + \frac{1}{4^n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \frac{11}{3} + \frac{1}{3 \times 4^n} - \frac{1}{4^n} \\ v_n = \frac{11}{3} + \frac{1}{3 \times 4^n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \frac{11}{3} - \frac{2}{3 \times 4^n} \\ v_n = \frac{11}{3} + \frac{1}{3 \times 4^n} \end{cases}$$