$2^{\text{ème}}$ sujet : CORRECTIONS

Corrigé Exercice 1

Partie A :

1. Réponse c. (AC) et (SB) ne sont pas coplanaires, car le point B n'appartient pas au plan (SAC)

2. Réponse c. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$: Avec le point $S(0;0;1)$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Partie B :

3. Réponse c. $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$ car $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}\times x - e^{2x}\times 1}{x^2} = \dfrac{(2x-1)e^{2x}}{x^2}$

4. Réponse a. $y = 7(x-1)$ On a $g'(x) = 2x + 2 + \frac{3}{x^2}$
donc $g(1) = 1 + 2 - 3 = 0$ et $g'(1) = 2 + 2 + 3 = 7 \Rightarrow y = g'(1)(x-1) + g(1) \Leftrightarrow y = 7(x-1)$

5. Réponse b. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3 \Rightarrow v_n = \dfrac{3n}{n+2} = \dfrac{3n}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \dfrac{3}{1+\frac{2}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$ donc par quotient…

Corrigé Exercice 2

Partie 1

1. a. $f'(x) = -30 + \frac{35}{x} = \dfrac{-30x+35}{x}$ CQFD

b. & c.

x	1		$\frac{35}{30}$		4
$-30x+35$		$+$	0	$-$	
x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	20	$\nearrow$	$15 + 35\ln\left(\frac{35}{30}\right)$	$\searrow$	$-70 + 35ln\,4$

2. f est continue sur $[1;4]$.
Sur $\left[1;\frac{35}{30}\right]$ elle est strictement positive ; donc l'équation $f(x) = 0$ n'y a pas de solution.
Sur $\left[\frac{35}{30};4\right]$, f est strictement décroissante, et on a $f\left(\frac{35}{30}\right) \simeq 20{,}4$ et $f(4) \simeq -21{,}5$. Donc $0 \in \left[f(4); f\left(\frac{35}{30}\right)\right]$
D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
A la calculatrice, on trouve $\boldsymbol{\alpha \simeq 2{,}915}$

3.

x	1		α		4
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Partie 2

1. $B(2{,}5) = -15 \times (2{,}5^2) + 15 \times 2{,}5 + 35 \times 2{,}5 \ln 2{,}5 = -56{,}25 + 87{,}5 \ln 2{,}5 \simeq 23{,}925$
L'entreprise réalise un bénéfice de 23 925 €

2. $B'(x) = -30x + 15 + 35\ln x + 35x \times \frac{1}{x} = -30x + 15 + 35\ln x + 35$
$= \mathbf{-30x + 50 + 35\ln x} = f(x)$ CQFD

3. a.

x	1		α		4
$f(x) = B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	0	$\nearrow$	$B(\alpha)$	$\searrow$	$-180 + 140\ln 4$

b. Le bénéfice est maximal pour $\alpha \simeq 2{,}915$ c'est-à-dire **pour environ 2 915 litres de jus**

Corrigé Exercice 3

1. **a.** Il semble que la suite (u_n) soit décroissante

b. La limite de la suite (u_n) semble être 0

c. $u_1 = \frac{4u_0}{u_0+4} = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5}$ et $u_2 = \frac{4u_1}{u_1+4} = \frac{4\times\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}+4} = \frac{16}{5} \div \frac{24}{5} = \frac{16}{24} = \mathbf{\frac{2}{3}}$

2. **a.** $v_0 = \frac{4}{u_0} = \frac{4}{1} = 4$, $v_1 = \frac{4}{u_1} = \frac{4}{\frac{4}{5}} = 4 \times \frac{5}{4} = 5$ et $v_2 = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 4 \times \frac{3}{2} = 6$

b. $v_{n+1} = \frac{4}{u_{n+1}} = \frac{4}{\frac{4u_n}{u_n+4}} = \frac{4(u_n+4)}{4u_n} = \frac{u_n+4}{u_n}$ Or on a $u_n = \frac{4}{v_n}$

donc $v_{n+1} = \frac{\frac{4}{v_n}+4}{\frac{4}{v_n}} = \frac{4+4v_n}{v_n} \times \frac{v_n}{4} = \frac{4(1+v_n)}{4} = 1 + v_n$

La suite v_n est bien arithmétique de raison 1 et de 1[er] terme $v_0 = 4$

c. $v_n = v_0 + nR = \mathbf{4 + n}$

d. $u_n = \frac{4}{v_n} = \mathbf{\frac{4}{4+n}}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} 4 + n = +\infty$ donc par quotient, on a bien $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{v_n} = \mathbf{0}$

Corrigé Exercice 4

Partie A

1. $F(1;0;1), I\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(1;1;\frac{2}{3}\right)$.

2. (d) passe par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Donc une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = \mathbf{0} \\ y = \mathbf{\frac{1}{2}} + \boldsymbol{t} \\ z = \mathbf{\frac{1}{2}} - \mathbf{\frac{1}{3}}\boldsymbol{t} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

3. a. On a $K(0;0;z)$ car il appartient à la droite (AE)

Il a appartient aussi à la droite (d) donc ses coordonnées vérifient le système : $\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = \frac{1}{2} + t \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$ On a bien $\boldsymbol{K\left(0; 0; \frac{2}{3}\right)}$

b. De même on a $L(0; 1; z)$, car $L \in (DH) et\ L \in (d) \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 1 = \frac{1}{2} + t \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$

Donc $\boldsymbol{L\left(0; 1; \frac{1}{3}\right)}$

4. a. On a alors $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \overrightarrow{FJ}$: **le quadrilatère $\boldsymbol{FJLK}$ est un bien un parallélogramme.**

b. On a $FJ = \sqrt{0^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{10}{9}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{3}}$

et $KF = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{3}}$

On a donc $KF = FJ$ et un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de la même longueur est un losange.

Donc $\boldsymbol{FJLK}$ est bien un losange.

Partie B

1. $J(1; 1; a)$

2. $\overrightarrow{FJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KL}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{a}{2} - 1 + \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{FJ}$ donc le quadrilatère **$\boldsymbol{FJLK}$ est un parallélogramme**.

3. on a $FJ = \sqrt{0^2 + 1^2 + (a-1)^2} = \sqrt{1 + a^2 - 2a + 1} = \sqrt{a^2 - 2a + 2}$

et $KF = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + \left(1 - 1 + \frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}}$

Pour que $FJLK$ soit un losange, on veut que $\sqrt{a^2 - 2a + 2} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} \Rightarrow a^2 - 2a + 2 = 1 + \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2 - 2a + 1 = 0$

On a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times \frac{3}{4} \times 1 = 4 - 3 = 1$

et $a_1 = \frac{2-1}{2 \times \frac{3}{4}} = 1 \times \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $a_2 = \frac{2+1}{2 \times \frac{3}{4}} = 3 \times \frac{4}{6} = 2$

Donc le quadrilatère $\boldsymbol{FJLK}$ est un losange pour $\boldsymbol{a = \frac{2}{3}}$ (partie A) et pour $\boldsymbol{a = 2}$