Raisonnement par récurrence, étape par étape

Cas 1	**Cas 2**	**Cas 3**
$u_{n+1} = 3u_n - 8\,; u_0 = 12$ Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\boldsymbol{u_n = 4 + 8 \times 3^n}$	$w_{n+1} = \dfrac{w_n}{1 + w_n}\,; w_0 = 5$ Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\boldsymbol{w_n = \dfrac{5}{5n+1}}$	$r_{n+1} = \dfrac{r_n}{\sqrt{r_n^2 + 1}}\,; r_1 = 1$ Montrer que, $\forall n \geq 1$, on a : $\boldsymbol{r_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$

Exercice A : Initialiser la récurrence

Cas 1

Pour $n = \cdots$

On a, d'une part

$u_n =$

Et d'autre part,

$4 + 8 \times 3^n =$

La propriété est vraie au rang …

Cas 2

Pour $n = \cdots$

On a, d'une part

$w_n =$

Et d'autre part,

$\dfrac{5}{5n+1} =$

La propriété est vraie au rang …

Cas 3

Pour $n = \cdots$

On a, d'une part

$r_n =$

Et d'autre part,

$\dfrac{1}{\sqrt{n}} =$

La propriété est vraie au rang …

Exercice B : Ecrire une propriété au rang $p + 1$

Cas 1

Pour $n = p$, on a
$4 + 8 \times 3^n = 4 + 8 \times 3^p$

Pour $n = p + 1$, on a la propriété

$4 + 8 \times 3^n =$

Cas 2

Pour $n = p$, on a $\frac{5}{5n+1} = \frac{5}{5p+1}$

Pour $n = p + 1$, on a la propriété

$\dfrac{5}{5n+1} =$

Cas 3

Pour $n = p$, on a $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{p}}$

Pour $n = p + 1$, on a la propriété

$\dfrac{1}{\sqrt{n}} =$

Exercice C : Prouver l'hérédité

Cas 1

Pour $n = p + 1$, on a, d'une part :

$u_n = u_{p+1} =$

Comme $u_p = 4 + 8 \times 3^p$, alors

$u_{p+1} =$

Et d'autre part :

$4 + 8 \times 3^n =$

La propriété est vraie au rang …

Cas 2

Pour $n = p + 1$, on a, d'une part :

$w_n = w_{p+1} =$

Comme $w_p = \frac{5}{5p+1}$, alors

$w_{p+1} =$

Et d'autre part :

$\dfrac{5}{5n+1} =$

La propriété est vraie au rang …

Cas 3

Pour $n = p + 1$, on a, d'une part :

$r_n = r_{p+1} =$

Comme $r_p = \frac{1}{\sqrt{p}}$, alors

$r_{p+1} =$

Et d'autre part :

$\dfrac{1}{\sqrt{n}} =$

La propriété est vraie au rang …

Exercice D : Récurrence à compléter

	Cas 4 $v_{n+1} = v_n + 2n + 3 \quad ; \quad v_0 = 1$ Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\boldsymbol{v_n = (n+1)^2}$	**Cas 5** $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 2}{2a_n + 5} \quad ; \quad a_0 = 3$ Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $a_n = \frac{9-8n}{3+8n}$
Initialisation	Pour $n =$ on a d'une part $v_n =$ et d'autre part $(n+1)^2 =$ Il y a égalité, la propriété est vraie pour $n =$	$a_n = a_0 = 3$ $\frac{9-8n}{3+8n} = \frac{9-0}{3+0} = \frac{9}{3} = 3$
Hérédité	Si pour $n = p$, l'égalité est vraie, on a : $v_p =$ Pour $n = p + 1$, on a alors d'une part : $v_n = v_{p+1} =$ Et d'autre part : $(n+1)^2 =$ La propriété est vraie au rang …	$a_p = \frac{9-8p}{3+8p}$ $a_n = a_{p+1} = \dfrac{a_p - 2}{2a_p + 5} = \dfrac{a_p - 2}{2a_p + 5}$ $= \dfrac{\dfrac{9-8p}{3+8p} - 2}{2 \times \dfrac{9-8p}{3+8p} + 5}$ $= \dfrac{9 - 8p - 2(3+8p)}{3+8p} \div \dfrac{2(9-8p) + 5(3+8p)}{3+8p}$ $= \dfrac{9 - 8p - 6 - 16p}{3+8p} \times \dfrac{3+8p}{18 - 16p + 15 + 40p}$ $= \dfrac{3 - 24p}{33 + 24p} = \dfrac{3(1-8p)}{3(11+8p)} = \dfrac{\mathbf{1 - 8p}}{\mathbf{11 + 8p}}$ $\dfrac{9-8n}{3+8n} = \dfrac{9 - 8(p+1)}{3 + 8(p+1)} = \dfrac{9 - 8p - 8}{3 + 8p + 8} = \dfrac{\mathbf{1 - 8p}}{\mathbf{11 + 8p}}$
Conclusion	Ainsi, pour tout nombre entier n , on a bien	$a_n = \dfrac{9-8n}{3+8n}$