

Savoir Fle. 3 : Transformation d'écritures

Entraînement 1

1) Simplifier les expressions suivantes, quand c'est possible :

a) $\ln(3e^{x-1})$ b) $\ln(e^x + 1)$ c) $e^{\ln(x^2)}$ d) $2e^{-\ln x}$

2) Démontrer, pour tout $x > 0$, l'équivalence : $xe^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = \ln x$

3) On considère l'équation $xe^{2x} = xe^x + e^x$.

Soit α une solution strictement positive de cette équation. Montrer que : $\alpha = \ln(\alpha + 1) - \ln(\alpha)$

Entraînement 2

1) Simplifier les expressions suivantes, quand c'est possible :

a) $e^{x-\ln 3}$ b) $3(1 + 2e^{\ln x})$ c) $\ln(e^x + xe^x)$ d) $\ln(e^{3\ln x})$

2) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $e^x x^2 = x \Leftrightarrow \ln x + x = 0$

Entraînement 3

1) Simplifier quand c'est possible : a) $e^{2\ln(3x)}$ b) $-\ln(2e^{-3x})$

2) Montrer que résoudre l'équation $x^2 + \ln 2 = 0$ est équivalent à résoudre $e^{x^2} = \frac{1}{2}$

Entraînement 4

1) Simplifier quand c'est possible : a) $\ln\left(\frac{3}{e^{1+x}}\right)$ b) $e^{3\ln 2x}$

2) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $e^{2x-1} = x \Leftrightarrow 1 + \ln x = 2x$

Entraînement 5

1) Simplifier quand c'est possible : a) $2\ln(3e^x)$ b) $-\frac{e^{2\ln x}}{x}$

2) Montrer que $x + \ln(e^x - 3) = 0$ est équivalent à $e^{2x} - 3e^x - 1 = 0$

Corrections Savoir Fle.3

Corrigé Entraînement 1

1) a) $\ln(3e^{x-1}) = \ln(3) + \ln(e^{x-1}) = \ln 3 + x - 1$ b) $\ln(e^x + 1)$ non simplifiable

c) $e^{\ln(x^2)} = x^2$ d) $2e^{-\ln x} = 2e^{\ln(\frac{1}{x})} = x \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

2) $xe^{-x} = 1 \Leftrightarrow \ln(xe^{-x}) = \ln(1) \Leftrightarrow \ln x + \ln(e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow \ln x - x = 0 \Leftrightarrow x = \ln x$

3) $\alpha e^{2\alpha} = \alpha e^\alpha + e^\alpha \Leftrightarrow \alpha e^{2\alpha} = (\alpha + 1)e^\alpha \Leftrightarrow \alpha e^\alpha = \alpha + 1$ en passant au logarithme :
 $\Leftrightarrow \ln(\alpha e^\alpha) = \ln(\alpha + 1) \Leftrightarrow \ln(\alpha) + \ln(e^\alpha) = \ln(\alpha + 1) \Leftrightarrow \alpha = \ln(\alpha + 1) - \ln(\alpha)$ CQFD

Corrigé Entraînement 2

1) a) $e^{x-\ln 3} = \frac{e^x}{e^{\ln 3}} = \frac{1}{3}e^x$ b) $3(1 + 2e^{\ln x}) = 3(1 + 2x) = 3 + 6x$

c) $\ln(e^x + xe^x) = \ln(e^x(1 + x)) = \ln(e^x) + \ln(1 + x) = x + \ln(1 + x)$

d) $\ln(e^{3\ln x}) = \ln(e^{\ln(x^3)}) = \ln(x^3) = 3\ln x$

2) $e^x x^2 = x \Leftrightarrow \ln(e^x x^2) = \ln(x) \Leftrightarrow \ln(e^x) + \ln(x^2) = \ln x \Leftrightarrow x + 2\ln x = \ln x \Leftrightarrow \ln x + x = 0$

Corrigé Entraînement 3

1) a) $e^{2\ln(3x)} = e^{\ln(9x^2)} = 9x^2$ b) $-\ln(2e^{-3x}) = -(\ln 2 + \ln(e^{-3x})) = -(\ln 2 - 3x) = -\ln 2 + 3x$

2) $x^2 + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\ln 2 \Leftrightarrow e^{x^2} = e^{-\ln 2} \Leftrightarrow e^{x^2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} \Leftrightarrow e^{x^2} = \frac{1}{2}$

Corrigé Entraînement 4

1) a) $\ln\left(\frac{3}{e^{1+x}}\right) = \ln 3 - \ln e^{1+x} = \ln 3 - 1 - x$ b) $e^{3\ln 2x} = e^{\ln((2x)^3)} = (2x)^3 = 8x^3$

2) $e^{2x-1} = x \Leftrightarrow \frac{e^{2x}}{e} = x \Leftrightarrow e^{2x} = ex \Leftrightarrow \ln(e^{2x}) = \ln(ex) \Leftrightarrow 2x = \ln e + \ln x \Leftrightarrow 2x = 1 + \ln x$

Corrigé Entraînement 5

1) a) $2\ln(3e^x) = 2(\ln 3 + \ln e^x) = 2\ln 3 + 2x$ b) $-\frac{e^{2\ln x}}{x} = -\frac{e^{\ln(x^2)}}{x} = -\frac{x^2}{x} = -x$

2) $x + \ln(e^x - 3) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x) + \ln(e^x - 3) = \ln 1 \Leftrightarrow \ln(e^x(e^x - 3)) = \ln 1 \Leftrightarrow e^x(e^x - 3) = 1$
 $\Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x - 1 = 0$